

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. VII, N. 3-bis

Serie nona

31 Maggio 1950

Teoria della fotodissociazione e formazione dell' H_3 e dell' He_3 .

M. VERDE

Istituto di Fisica dell'Università - Bologna ()*

(ricevuto il 27 Marzo 1950)

Riassunto. — La fotodissociazione e la formazione dei due nuclei H_3 ed He_3 possono servire a dare buone informazioni sulle configurazioni di questi nuclei e sulla natura delle forze nucleari. In questo lavoro abbiamo trattato il problema dal punto di vista teorico. Abbiamo sistematicamente preso in considerazione le proprietà di simmetria nello spazio ordinario ed in quello di spin e spin isotopico. Nel primo numero descriviamo il formalismo adoperato, nel secondo viene discusso lo stato fondamentale di H_3 e di He_3 che risulta dato prevalentemente da una autofunzione completamente simmetrica nelle coordinate di spazio. Nel terzo numero studiamo la transizione magnetica in uno stato finale che è costituito da un deutone nello stato fondamentale ed un nucleone libero. Questa transizione è proibita per configurazioni completamente simmetriche di spazio. Nel quarto numero abbiamo valutato la transizione elettrica in uno stato finale costituito da un deutone 3S ed un nucleone. La fig. 1 fornisce i risultati numerici per la sezione d'urto totale. Nel numero 5 abbiamo considerato il caso della transizione diretta in tre nucleoni liberi. Nell'ultimo numero si trovano le formule per la sezione d'urto di cattura di un nucleone libero da parte di un deutone 3S .

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica del Politecnico di Zurigo.

Introduzione.

Un contributo importante alla conoscenza del campo di forza nucleare, ci può essere fornito dalle configurazioni che tre nucleoni possono assumere, in seguito alle interazioni che essi esercitano tra di loro.

Se anche i dati sperimentali che si riferiscono a problemi di due corpi, fossero in grado di darci definitivamente il potenziale nucleare, sarebbe molto interessante di provare la sua validità in problemi di tre corpi, i quali sono in generale più sensibili alla dipendenza dalle variabili di spin e spin isotopico del potenziale in questione. Rimarrebbe poi anche da stabilire, se i potenziali sono semplicemente additivi.

L'esistenza dei due stati legati che costituiscono i nuclei dell' H_3 e dell' He_3 e le informazioni sperimentali che ne sono state tratte, le esperienze d'urto neutroni-deutoni e protoni-deutoni, favoriscono la necessità di fare una trattazione teorica di problemi di tre corpi in fisica nucleare.

In questo lavoro, ci siamo proposti di studiare la dissociazione dei due nuclei H_3 e He_3 in seguito all'azione di un campo elettromagnetico, un fenomeno che forse meglio si presta agli scopi di cui abbiamo parlato. Costituendo la formazione dei nuclei in questione il processo inverso, è facile dedurre le corrispondenti sezioni d'urto.

Sarebbe utile di studiare sperimentalmente queste reazioni. Se l'interazione simmetrica corrisponde al vero, le sezioni d'urto devono essere le stesse per i due nuclei, a parte gli effetti della repulsione coulombiana nell' He_3 .

Ci consta che le uniche esperienze del nostro tipo, sono quelle di FOWLER ⁽¹⁾ e coll., che hanno studiato la formazione dell' He_3 ed in particolare la distribuzione angolare dei quanti γ emessi, rispetto ai protoni incidenti e che è praticamente una pura dipendenza del tipo $\sin^2 \Theta$. Sarebbe interessante di provare se questo è anche il caso per la formazione dell' H_3 in seguito a cattura di neutroni da parte di deutoni.

Stando al grande numero di variabili nella trattazione teorica, per non complicare inutilmente il problema, occorre sin dal principio rispettare tutte le costanti del moto, vale a dire scegliere nello spazio delle coordinate di posizione, di quelle di spin e di spin isotopico, dei riferimenti irriducibili per le operazioni di quei gruppi che lasciano invariante l'hamiltoniana del sistema. Abbiamo per questo premesso una parte formale che costituisce il primo numero. Se lo stato fondamentale dei due nuclei H_3 e He_3 è prevalentemente simmetrico nelle coordinate di spazio — e la plausibilità di questa ammissione viene discussa nel secondo numero — la transizione fotomagnetica dovrebbe

(1) W. FOWLER e al.: *Phys. Rev.*, **76**, 1767 (1949).

essere proibita (cfr. n. 3), e quella fotoelettrica rimarrebbe la sola possibile con una distribuzione angolare di tipo $\sin^2 \Theta$ (cfr. n. 4). Ciò varrebbe anche a spiegare il fatto che i neutroni termici sono poco catturati dai deutoni, I casi studiati nei nn. 3 e 4 corrispondono alla liberazione di un nucleone e la formazione di un deutone nello stato fondamentale. La transizione ad uno stato finale fatto di tre nucleoni liberi fa oggetto del n. 5. Nel n. 6 si trovano le formule per le sezioni d'urto di formazione.

1. - Premessa formale.

Vogliamo cominciare col riassumere brevemente il formalismo, che adopereremo sistematicamente nel seguito, e che è stato già in parte usato ⁽²⁾ a proposito dell'urto elastico neutrone-deutone. È importante di porre in evidenza le proprietà di simmetria delle operazioni che intervengono in problemi dei tre corpi con l'introdurre i seguenti operatori:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} T^s = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (1,2) + (1,3) + (2,3) \} \\ T' = \frac{\sqrt{3}}{2} \{ (1,3) - (1,2) \} \\ T'' = - (2,3) + \frac{1}{2} \{ (1,3) + (1,2) \}, \end{array} \right.$$

(1, 2), (1, 3), (2, 3) stanno ad indicare le permutazioni delle variabili collegate a ciascuno dei tre corpi 1, 2, 3. Operando ad esempio sulle coordinate spaziali r_1, r_2, r_3 , gli operatori di sopra generano le coordinate normali

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} q^s = \frac{1}{\sqrt{2}} (r_1 + r_2 + r_3) \\ r = \frac{\sqrt{3}}{2} (r_3 - r_2) \\ q = -r_1 + \frac{1}{2} (r_3 + r_2), \end{array} \right.$$

in questo riferimento che adotteremo nel seguito, l'energia cinetica totale si scrive:

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m_r} (\Delta_{q^s} + \Delta_r + \Delta_q),$$

m_r essendo la massa ridotta di un corpo rispetto al sistema degli altri due $m_r = (2/3)M$.

⁽²⁾ M. VERDE: *Helv. Phys. Acta*, **22**, 340 (1949).

Inoltre il momento angolare totale si scrive:

$$\mathbf{M} = \frac{\hbar}{i} \sum_k^3 (\mathbf{r}_k \wedge \nabla_k) = \frac{\hbar}{i} \{ \mathbf{q}^s \wedge \nabla_{\mathbf{q}^s} + \mathbf{r} \wedge \nabla_{\mathbf{r}} + \mathbf{q} \wedge \nabla_{\mathbf{q}} \}.$$

Nel sistema del baricentro al quale intendiamo riferirci l'energia cinetica ed il momento angolare diventano

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m_r} (\Delta_r + \Delta_q), \quad \mathbf{M} = \frac{\hbar}{i} (\mathbf{r} \wedge \nabla_r + \mathbf{q} \wedge \nabla_q).$$

Occorre osservare a proposito degli operatori definiti dalla (1) che essi generano, operando su funzioni simmetriche ad esempio nelle variabili 2 e 3, le basi per le due rappresentazioni unitarie I e D che sono rispettivamente quella identica ad una dimensione ($I = 1$) e quella a due dimensioni D :

$$D: \quad (1,2) = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad (1,3) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad (2,3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

del gruppo di permutazione di tre elementi.

Nel sottospazio definito da D , gli operatori T^s , T' e T'' operano nel seguente modo:

$$(3) \quad T^s = 0, \quad T' = -3/2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T'' = +3/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'operatore prodotto $T'T''$ anticommuta:

$$T'T'' + T''T' = 0;$$

inoltre

$$T'^2 = T''^2 = 9/4.$$

È facile stabilire in conseguenza delle (1), se φ^s e (φ', φ'') sono tre funzioni qualunque delle coordinate $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ che si trasformano rispetto alle permutazioni secondo la I e D , la validità delle seguenti relazioni di cui faremo uso costante nel seguito:

$$(4) \quad \begin{cases} \int \varphi^s \varphi' dv = \int \varphi^s \varphi'' dv = \int \varphi' \varphi'' dv = 0, \\ \int \varphi'^2 dv = \int \varphi''^2 dv. \end{cases}$$

Gli integrali si intendono estesi a tutto lo spazio di $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$; $dv = d^3r_1 d^3r_2 d^3r_3$ è l'elemento di volume. Nel sistema del baricentro $dv = d^3r d^3q$.

Gli operatori di simmetria definiti dalla (1) servono a stabilire anche il riferimento nello spazio dello spin e dello spin isotopico. Per tre nucleoni lo spin totale S può essere $3/2$ o $1/2$, altrettanto vale dello spin isotopico T .

Le considerazioni che si fanno per lo spin si applicano tali e quali allo spin isotopico, possiamo dunque limitarci a parlare ad esempio di quest'ultimo.

Se a_1 e b_1 sono le due autofunzioni della componente z dello spin isotopico della particella 1, si ha:

$$\tau_z^{(1)} a_1 = a_1, \quad \tau_z^{(1)} b_1 = -b_1.$$

Possiamo definire per mezzo di (1) gli operatori di spin isotopico

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_z^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_z^{(1)} + \tau_z^{(2)} + \tau_z^{(3)}), \\ \tau_z' = \frac{\sqrt{3}}{2} (\tau_z^{(3)} - \tau_z^{(2)}), \\ \tau_z'' = -\tau_z^{(1)} + \frac{1}{2} (\tau_z^{(2)} + \tau_z^{(3)}). \end{array} \right.$$

La carica complessiva che è un operatore simmetrico si può esprimere mediante $\tau_z^{(s)}$

$$Q = \frac{3 + \sqrt{2} \tau_z^{(s)}}{2} e,$$

e essendo la carica elettronica.

Per l'H₃

$$\sqrt{2} \tau_z^{(s)} = -1,$$

e per l'He₃

$$\sqrt{2} \tau_z^{(s)} = +1.$$

Le tre autofunzioni di spin isotopico relative alla H₃ si possono generare operando con i soliti operatori di simmetria (1) sull'autofunzione

$$a_1 b_2 b_3 \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Si ottiene:

$$\zeta_-^s = T^s(a_1 b_2 b_3) \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \zeta_-' = T'(a_1 b_2 b_3) \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \zeta_-'' = T''(a_1 b_2 b_3) \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Il fattore $\sqrt{(2/3)}$ è scelto in modo che le ζ siano normalizzate ad uno.

Per ottenere le autofunzioni di spin isotopico dell'He₃ basta fare altrettanto sull'autofunzione

$$b_1 a_2 a_3 \sqrt{\frac{2}{3}},$$

indicheremo queste tre autofunzioni con ζ_+ , ζ_+' , ζ_+'' .

Nello spazio di ζ^s, ζ', ζ'' gli operatori definiti dalla (5) sono rappresentati dalle seguenti matrici:

$$(6) \quad \sqrt{2} \tau_z^{(s)} = \pm 1, \quad \tau_z' = \pm \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z'' = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il segno $+$ vale per l' He_3 ed il $-$ per l' H_3 come si può leggere dalla prima delle (6).

Vogliamo ancora menzionare che l'operatore simmetrico $\tau_z^{(1)} \cdot \tau_z^{(2)} \cdot \tau_z^{(3)}$ è eguale ad uno, perchè lascia invariata la nostra base di riferimento. Se ne deduce che

$$(7) \quad \tau_z^{(1)} \tau_z^{(2)} + \tau_z^{(1)} \tau_z^{(3)} + \tau_z^{(2)} \tau_z^{(3)} = \sqrt{2} \tau_z^{(s)}.$$

Queste considerazioni basterebbero per stati del sistema di tre corpi corrispondenti ad uno spin $3/2$, vale a dire con una autofunzione di spin χ^s completamente simmetrica rispetto a permutazioni dei tre corpi. Il fatto che gli stati fondamentali dell' H_3 e He_3 hanno spin $1/2$ complica la situazione, perchè occorre introdurre autofunzioni di spin χ'_\pm, χ''_\pm che si trasformano rispetto a permutazioni secondo la D e di conseguenza obbliga a trovare i sottospazi irriducibili nello spazio prodotto $D_\sigma \times D_\tau$ che ha quattro dimensioni e che sono come è ben noto ⁽³⁾ uno simmetrico, uno antisimmetrico e l'altro a due dimensioni.

La base nello spazio prodotto è:

$$(8) \quad \begin{cases} \xi^s = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi' \zeta' + \chi'' \zeta''), \\ \xi^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi' \zeta'' - \chi'' \zeta'), \end{cases} \quad \begin{cases} \xi' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi' \zeta'' + \chi'' \zeta'), \\ \xi'' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi' \zeta' - \chi'' \zeta''). \end{cases}$$

Queste autofunzioni sono ortogonali tra di loro e normalizzate. ξ', ξ'' si trasformano secondo la D .

Vogliamo a questo proposito porre in rilievo, che la legge di composizione che appare evidente nella formazione della nuova base data dalle (8) vale per qualunque insieme di due coppie di variabili che si trasformano secondo D . Così, ad esempio, poichè sappiamo che i vettori \mathbf{r} e \mathbf{q} si trasformano secondo la D , $r^2 + q^2$ è un'invariante, e $[2(\mathbf{r} \times \mathbf{q}), (r^2 - q^2)]$ è una coppia che si trasforma ancora secondo la D .

È naturale, che in corrispondenza dei due valori della componente z dello

⁽³⁾ Si confronti, ad esempio, V. DER WAERDEN: *Die Gruppentheoretische Methode der Quantenmechanik* (pag. 57).

spin, avremo una coppia di insiemi ξ , che indicheremo con ξ_{\pm} per l'H₃ ed un'altra per l'He₃.

Per il seguito è importante di sapere come operano gli operatori τ'_z e τ''_z nello spazio delle ξ .

Facendo uso delle (6) si trova immediatamente:

$$(9) \quad \tau'_z \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^a \\ \xi' \\ \xi'' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\xi' - \chi' \zeta^s \\ -\xi'' + \chi'' \zeta^s \\ -\xi^s - \chi' \zeta^s \\ -\xi^a - \chi' \zeta^s \end{pmatrix}, \quad \tau''_z \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^a \\ \xi' \\ \xi'' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\xi'' - \chi'' \zeta^s \\ +\xi' - \chi' \zeta^s \\ +\xi^a - \chi' \zeta^s \\ -\xi^s + \chi'' \zeta^s \end{pmatrix}.$$

Il segno + o - corrisponde alla carica, rispettivamente all'He₃ e H₃.

Gli operatori τ'_z e τ''_z non conservano dunque lo spin isotopico totale che può divenire 3/2 come si vede con la comparsa di \bar{s}^s .

L'operatore

$$(10) \quad S = \frac{1}{2} (\sigma'_z \tau'_z + \sigma''_z \tau''_z)$$

che opera contemporaneamente nello spazio dello spin e della carica, è invariante rispetto a permutazioni contemporanee di queste coordinate.

σ'_z e σ''_z sono i corrispondenti di τ'_z e τ''_z per le coordinate di spin. Poichè σ'_z e σ''_z operano in modo analogo a τ'_z e τ''_z è facile dedurre che

$$(11) \quad S \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^a \\ \xi' \\ \xi'' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \xi^s + \sqrt{2} \chi^s \zeta^s \\ -\xi^a \\ \chi' \zeta^s + \zeta' \chi^s \\ \chi'' \zeta^s + \zeta'' \chi^s \end{pmatrix}.$$

Il segno + si riferisce a componenti totali z di spin e di spin isotopico entrambe positive o negative, il segno -, invece, si riferisce al caso in cui queste componenti hanno segno contrario.

S dunque non conserva nè lo spin totale nè lo spin isotopico. Osserviamo tuttavia che ξ^a è una autofunzione di S , ciò sarà importante nel seguito.

Facciamo notare inoltre che con $\sqrt{2} \sigma_z^s = +1$,

$$(12) \quad \xi^s * S \xi^s = \pm 1, \quad \xi^a * S \xi^a = \mp 1, \quad \xi^s * S \xi' = \xi'' * S \xi'' = 0.$$

Il segno superiore si riferisce all'He₃ e l'inferiore all'H₃.

Dopo questa premessa formale, passiamo a discutere gli stati fondamentali dei nostri due nuclei.

2. - Stati fondamentali.

I dati sperimentali già noti, utili a darci alcune informazioni sulla configurazione dell' ${}^1\text{H}_3$ e dell' ${}^1\text{He}_3$ sono:

l'energia di legame, lo spin, il momento magnetico.

Per le energie di legame E_{H_3} e E_{He_3} i dati migliori ⁽⁴⁾ provenienti dalle reazioni:

$$\begin{aligned} D + D &\rightarrow \text{H}_3 + p + Q_1, & Q_1 &= 4,036 \pm 0,022 \text{ MeV}, \\ D + D &\rightarrow \text{He}_3 + n + Q_2, & Q_2 &= 3,265 \pm 0,018 \text{ MeV}, \end{aligned}$$

danno ⁽⁵⁾

$$\begin{aligned} E_{\text{H}_3} &= 2E_D - Q_1 = -8,51 \pm 0,09 \text{ MeV}, \\ E_{\text{He}_3} &= 2E_D - Q_2 = -7,739 \pm 0,1 \text{ MeV}, \end{aligned}$$

qualora si adoperi per E_D la misura diretta di BELL e ELLIOT ⁽⁶⁾

$$E_D = -2237 \pm 5 \text{ keV}.$$

Per la differenza delle due energie ⁽⁴⁾ si ha il valore:

$$E_{\text{He}_3} - E_{\text{H}_3} = Q_1 - Q_2 = 771 \pm 6 \text{ keV}.$$

Le misure dei momenti magnetici sono ottime. Per il tritone ⁽⁷⁾ si ha:

$$\mu_T = +2,9786$$

mentre per l' ${}^1\text{He}_3$ ⁽⁷⁾

$$\mu_{\text{He}_3} = -2,12741$$

(in magnetoni nucleari).

È ancora sperimentalmente accertato ⁽⁸⁾, ⁽⁹⁾, ⁽¹⁰⁾ che lo spin dello stato fondamentale è $S = 1/2$ sia per l' ${}^1\text{H}_3$ che per l' ${}^1\text{He}_3$.

⁽⁴⁾ A. V. TOLLESTRUP e al.: *Phys. Rev.*, **76**, 1947 (1949).

⁽⁵⁾ Qualora si adoperassero l'energia massima dell'elettrone emesso nel decadimento β del tritone dato dalla misura di HANNA e PONTECORVO (*Phys. Rev.*, **75**, 983 (1949)) e la differenza di massa spettroscopica $2H^1 - H^2 = 1,432 \pm 0,002 \text{ MeV}$ si otterrebbe una $E_D = -2,221 \text{ MeV}$ e di conseguenza

$$E_{\text{H}_3} = -8,478 \pm 0,07 \text{ MeV} \quad E_{\text{He}_3} = -7,707 \pm 0,06 \text{ MeV},$$

⁽⁶⁾ R. E. BELL, C. G. ELLIOTT: *Phys. Rev.*, **74**, 1552 (1948).

⁽⁷⁾ F. BLOCH e al.: *Phys. Rev.*, **71**, 551 (1947).

⁽⁸⁾ G. H. DIECKE e F. S. TOMKINS: *Phys. Rev.*, **76**, 283 (1949).

⁽⁹⁾ H. L. ANDERSON: *Phys. Rev.*, **76**, 1460 (1949).

⁽¹⁰⁾ A. E. DOUGLAS e G. HERZBERG: *Phys. Rev.*, **76**, 1529 (1949).

Questi dati servono già a trarre alcune conclusioni sicure.

Si può ad esempio affermare che lo stato fondamentale possiede lo spin isotopico $1/2$ e scartare l'altra possibilità di $T = 3/2$.

Una configurazione spaziale, completamente simmetrica nelle coordinate dei tre corpi, si può infatti presentare solo nel primo caso di $S = 1/2$ e $T = 1/2$ mentre essa è esclusa nel secondo caso. Questo significa anche che il livello fondamentale deve essere il primo e non il secondo, perchè come è noto, a parità di energia potenziale le configurazioni simmetriche hanno un'energia cinetica inferiore.

Si tratta d'altronde della stessa ragione che serve a spiegare perchè il livello $S = 3/2$ e $T = 1/2$ è sicuramente più alto. A parte ciò, il valore sperimentale dei momenti magnetici serve a confermare lo spin $T = 1/2$ per gli stati fondamentali in questione.

Il momento magnetico totale del nostro sistema, si scrive:

$$(13) \quad \mu = \sum_r^3 \sigma_z^{(r)} \left(\frac{1 + \tau_z^{(r)}}{2} \mu_P + \frac{1 - \tau_z^{(r)}}{2} \mu_N \right) = \\ = \frac{\mu_N + \mu_P}{2} \sqrt{2} \sigma_z^{(s)} + \frac{\mu_P - \mu_N}{3} (\sigma_z^{(s)} \tau_z^{(s)} + 2S);$$

come al solito $\sigma_z^{(s)} = T^{(s)} \sigma_z^{(1)}$, S è definito dalla (10), z è la direzione in cui $\sqrt{2} \sigma_z^{(s)} = +1$ come deve essere per la definizione di momento magnetico. Dunque

$$\mu = \frac{\mu_P + \mu_N}{2} + \frac{\mu_P - \mu_N}{3} \left(\frac{\sqrt{2} \tau_z^{(s)}}{2} + 2S \right).$$

È facile rendersi conto usando le (11) che S ha un valore zero in uno stato $S = 1/2$, $T = 3/2$. In questo stato si ha perciò ⁽¹¹⁾:

$$(14) \quad \begin{cases} \mu = \frac{2}{3} \mu_P + \frac{1}{3} \mu_N, & \text{per l'He}_3, \\ \mu = \frac{2}{3} \mu_N + \frac{1}{3} \mu_P, & \text{» l'H}_3, \end{cases}$$

e questi valori sono in contraddizione con i risultati sperimentali.

Nello stato $S = 1/2$, $T = 1/2$ invece, tenuto conto di (12) e precisamente, nella configurazione spaziale completamente simmetrica, alla quale appar-

⁽¹¹⁾ Si osservi che cambiando $\tau_z^{(s)}$ e S di segno quando si scambia un protone in un neutrone, per ottenere i momenti magnetici di H_3 a partire da quello di He_3 basta scambiare μ_N con μ_P .

tiene una autofunzione di spin e spin isotopico completamente antisimmetrica ξ^a , si ha:

$$(15) \quad \begin{cases} \mu = \mu_N, & \text{per l'He}_3, \\ \mu = \mu_P, & \text{» l'H}_3. \end{cases}$$

Il fatto che nello stato ξ^a i momenti magnetici siano rispettivamente

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{4}{3} \mu_P - \frac{1}{3} \mu_N, & \text{per l'He}_3, \\ \mu &= \frac{4}{3} \mu_N - \frac{1}{3} \mu_P, & \text{» l'H}_3, . \end{aligned}$$

ci autorizza ad affermare che lo stato completamente antisimmetrico di spazio è praticamente assente nello stato fondamentale. A riconferma di ciò, valgono le considerazioni relative all'energia cinetica che nelle configurazioni antisimmetriche è sempre molto grande.

Facciamo pure notare che lo stato a due dimensioni (ξ' , ξ'') al quale corrispondono momenti magnetici dati dalla (14) (si confronti la (12)) non può presentarsi in miscuglio sensibile con quello completamente antisimmetrico di spin, perchè tende a portare i momenti magnetici nella direzione contraria alla correzione che bisogna fare dei momenti dati dalla (15) per spiegare quelli sperimentali.

D'altra parte è possibile rendersi conto di queste circostanze, quando si valuta numericamente l'importanza relativa dei due stati in questione, per mezzo del solito metodo variazionale. Per una discussione più dettagliata rimandiamo ad un altro lavoro ⁽¹²⁾.

Adoperando per lo stato fondamentale la configurazione di spazio simmetrica data da

$$(16) \quad \varphi^s = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{x}{\mu}\right)^3 \exp \left[-\frac{x^2}{2\mu^2} (r^2 + q^2) \right],$$

normalizzata in modo che

$$\int |\varphi^s|^2 dv = 1$$

ed un potenziale di interazione U_{23} tra due nucleoni 2 e 3 del tipo simmetrico

$$\frac{4M}{3\hbar^2} U_{23} = \frac{1}{3} (\tau^{(2)} \cdot \tau^{(3)}) \cdot \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} g\right) + \frac{1}{2} g (\sigma^{(2)} \cdot \sigma^{(3)}) \right\} \frac{\exp[-xr]}{xr} x^2 s,$$

si ha per μ il valore $\mu = 1,40$.

⁽¹²⁾ M. VERDE: Lavoro di abilitazione per la docenza, Zurigo.

Nella formula precedente M indica la massa nucleonica, $1/x = \sqrt{3}/2 \cdot (1,18) \cdot 10^{-13}$ cm e $s = 2,285$. Questi dati sono forniti dalle esperienze con due corpi.

L'energia di legame corrispondente per l' H_3 risulta: $E = -2,45$ MeV.

Il fatto che essa è troppo piccola è in parte dovuto alla scelta dell'autofunzione che è imposta dalla necessità di semplificare il calcolo, in parte è una conseguenza dell'interazione adottata che è quella dedotta come abbiamo detto dai dati dei due corpi. Se il raggio d'azione $1/x$ viene aumentato, le cose migliorano notevolmente, altrettanto si dica se si introduce la forza tensoriale.

Noi vogliamo rideterminare il parametro μ dalla repulsione coulombiana dell' He_3 .

L'energia di COULOMB è

$$E_c = e^2 \sum_{i < k}^{1 \dots 3} \left(\frac{1 + \tau_z^{(i)}}{2} \right) \left(\frac{1 + \tau_z^{(k)}}{2} \right) \frac{1}{r_{ik}},$$

che si scrive anche, tenuto conto di (5) e (7),

$$E_c = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{2} \tau_z^{(s)}) T^s \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \right).$$

Per l' He_3 è dunque:

$$E_c = \frac{1}{\sqrt{2}} e^2 T^s \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \right),$$

nello stato definito dalla (16) si ha:

$$E_c = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{x}{\mu} e^2,$$

da cui, assunto per E_c il valore sperimentale, (4)

$$E_c = 771 \text{ keV},$$

col nostro valore di $x(\sqrt{3}/2)$ si ottiene $\mu = 2,68$.

Per la valutazione numerica della sezione d'urto (24) abbiamo adoperato questo secondo valore per μ .

D'altra parte se si vuole tenere conto anche dello stato di spin ξ' , ξ'' si può scegliere per lo stato fondamentale una autofunzione del tipo

$$\psi = \varphi^s \xi^a + \varphi' \xi'' - \varphi'' \xi',$$

dove per l'antisimmetria rispetto a permutazioni di tutte le variabili è necessario che φ' , φ'' si trasformino secondo la D (cfr. la seconda delle (8)).

Possiamo ad esempio porre per φ^s , φ' e φ'' funzioni del tipo ⁽¹³⁾:

$$(17) \quad \begin{cases} \varphi^s = \sqrt{N^s} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{x}{\mu}\right)^3 \exp \left[-\frac{x^2}{2\mu^2} (r^2 + q^2) \right], \\ \varphi' = \sqrt{\frac{N'}{3}} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{x}{\nu}\right)^5 2(\mathbf{r} \times \mathbf{q}) \exp \left[-\frac{x^2}{2\nu^2} (r^2 + q^2) \right], \\ \varphi'' = \sqrt{\frac{N'}{3}} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{x}{\nu}\right)^5 (r^2 - q^2) \exp \left[-\frac{x^2}{2\nu^2} (r^2 + q^2) \right], \end{cases}$$

le quali manifestamente godono delle volute proprietà di simmetria per quello che si è già detto a proposito delle (8) e sono tali che

$$\int |\varphi^s|^2 dv = N^s, \quad \int |\varphi'|^2 dv = \int |\varphi''|^2 dv = N',$$

per la normalizzazione occorre che

$$N^s + 2N' = 1.$$

Il calcolo variazionale ⁽¹⁰⁾ fornisce per N' , rimanendo le costanti di interazione quelle di sopra, un valore estremamente piccolo, vale a dire $2N' \cong 10^{-3}$.

L'energia di legame che contiene termini misti nei quali compare $\sqrt{N'}$, sale al valore $E = -3,1$ MeV e $\nu = 1,0$.

È inutile dire che la correzione che ne deriva per la repulsione coulombiana è trascurabile. Vogliamo tuttavia indicare la formula:

$$\frac{E_c}{mc^2} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar x}{mc} \left(\frac{N^s}{\mu} + \frac{16}{3} \frac{N'}{\nu} \right).$$

3. - Transizioni dovute al campo magnetico.

Per la valutazione della sezione d'urto di fotodissociazione dei nostri nuclei, vogliamo distinguere come si fa di solito tra transizioni dovute al campo magnetico della radiazione incidente e quelle dovute al campo elettrico. In questo numero ci occuperemo del primo tipo.

Ci limitiamo all'approssimazione in cui il campo magnetico si può ritenere uniforme su tutta l'estensione del nucleo, vale a dire alle transizioni per dipolo magnetico.

L'interazione si scrive

$$H'_m = -\mu_z H_z;$$

⁽¹³⁾ F. VILLARS e A. THELLUNG: *Helv. Phys. Acta*, **21**, 355 (1948).

μ_z è la componente del momento magnetico nucleare nella direzione del campo, a sua volta normale a quella di propagazione e di polarizzazione.

Per μ_z possiamo adoperare l'espressione già indicata nella (13):

$$(18) \quad \mu_z = \left\{ \frac{\mu_P + \mu_N}{2} \sqrt{2} \sigma_z^{(s)} + \frac{\mu_P - \mu_N}{3} (\sigma_z^{(s)} \tau_z^{(s)} + 2S) \right\} \frac{1}{2} \frac{e\hbar}{Mc}.$$

Per il campo normalizzato in modo che la densità di corrente incidente sia uguale ad uno, bisogna scegliere

$$H_z = \sqrt{2\pi\hbar\omega},$$

$\hbar\omega$ essendo l'energia dei fotoni.

Il fatto che ξ^a è, come abbiamo fatto osservare a p. 289, autofunzione di μ_z , ha come conseguenza che la transizione magnetica dallo stato simmetrico di spazio φ^s , che è poi la più importante, è proibita. Infatti lo stato simmetrico del continuo, l'unico nel quale potrebbe avvenire la transizione, appartenendo agli stessi numeri quantici $S = 1/2$ e $T = 1/2$ è ortogonale ad esso.

Questa circostanza può servire a spiegare il noto fatto sperimentale, che la sezione d'urto di cattura di neutroni termici da parte di deutoni è estremamente piccola.

Volendo valutare la transizione dallo stato di spin ξ' , ξ'' a quello del continuo, bisogna cominciare con l'operare su

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (\varphi' \xi''_+ - \varphi'' \xi'_+) + (\varphi' \xi''_- - \varphi'' \xi'_-) \},$$

con l'operatore (18).

È naturale che la parte diagonale non fornisce nessun contributo alla transizione e basta perciò limitarsi all'operatore

$$\frac{e\hbar}{Mc} \frac{\mu_P - \mu_N}{3} S.$$

Tenuto conto di (11) si ha, per l' He_3 ,

$$Su = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \varphi' (\chi''_+ \zeta^s + \zeta'' \chi'_+) - \varphi'' (\chi'_+ \zeta^s + \zeta' \chi'_+) - \\ - \varphi' (\chi''_- \zeta^s + \zeta'' \chi'_-) + \varphi'' (\chi'_- \zeta^s + \zeta' \chi'_-) \}.$$

per l' H_3 basta cambiare di segno.

Lo stato finale deve possedere i numeri quantici di spin $S = 1/2$, $T = 3/2$ o viceversa $S = 3/2$ e $T = 1/2$. Delle due alternative, la seconda è molto più importante, perchè permette uno stato finale costituito da un deutone ${}^3\text{S}$ nel suo stato fondamentale e l'emissione di un neutrone o un protone a seconda

che si tratti di H_3 o He_3 . L'altro caso corrisponderebbe a un deutone 1S che è simmetrico nelle coordinate di carica, ed un nucleone libero.

La valutazione della probabilità di transizione in questo caso, sarà inclusa in quella in cui lo stato finale è costituito da tre nucleoni liberi (cfr. n. 5).

L'elemento di matrice che ci occorre è dunque:

$$(19) \quad M_{fi} = \int \psi_f^* H'_w \psi_i dv = \frac{e\hbar}{Mc} \frac{\mu_P - \mu_N}{3} \sqrt{\pi\hbar\omega} \int (\varphi_f^* \varphi'_i + \varphi_f'^* \varphi''_i) dv,$$

dove si intende di avere già sommato rispetto alle componenti z dello spin.

Per il calcolo della sezione d'urto si può adoperare la solita formula della teoria delle perturbazioni

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar c} |M_{fi}|^2 \cdot \rho_f.$$

Per lo stato finale assumeremo:

$$(20) \quad \begin{cases} \varphi'_f = T' \varphi_f, \\ \varphi''_f = T'' \varphi_f, \end{cases}$$

rimandando al lavoro citato in (2) per ulteriori chiarimenti. φ_f ha il comportamento asintotico per grandi q

$$\varphi_f \propto \frac{1}{3} g(r) \frac{\sin(kq + \delta_4)}{kq},$$

se si tratta dell' H_3 , per l' He_3 occorre adoperare l'onda S distorta dal campo coulombiano del deutone. $g(r)$ sta per l'autofunzione del deutone nello stato 3S normalizzata ad uno nello spazio di r

$$\int |g(r)|^2 d^3r = 1,$$

δ_4 è la fase nello sparpagliamento del neutrone nel campo del deutone, relativa al quartetto.

Come al solito

$$\rho_f = \frac{k_q^2 dk_q d\omega}{dE_f} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3, \quad E_f = \hbar\omega - |E_L| = \frac{\hbar^2 k_q^2}{2m_r},$$

$|E_L|$ è il lavoro per rompere il legame del neutrone o del protone all' H_3 rispettivamente He_3 . $(\hbar^2 k_q^2)/(2m_r)$ è l'energia cinetica del nucleone liberato nel moto relativo al deutone.

$$\begin{aligned} E_{L_1} &= -8,5 + 2,23 = -6,27 \text{ MeV}, & \text{per } H_3, \\ E_{L_2} &= -7,73 + 2,23 = -5,50 \text{ MeV}, & \text{» } He_3, \end{aligned}$$

sono le due soglie di questo processo.

Adoperando la (20) facendo uso delle (3), (4), l'elemento di matrice dato dalla (19) si scrive:

$$M_{fi} = \frac{e\hbar}{Mc} \sqrt{\pi\hbar\omega} (\mu_N - \mu_P) \int \varphi_f^* \varphi_i'' dv.$$

Noi vogliamo limitarci a dare l'ordine di grandezza per un k_q^2 abbastanza grande, in modo che si possa porre per φ_f il prodotto dell'autofunzione del deutone che per semplicità assumiamo di forma gaussiana

$$g(r) = \left(\alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^{3/2} \exp[-\alpha^2 r^2],$$

per un'onda S libera sin kq/kq .

Tenuto conto di (17) l'espressione finale della sezione d'urto è:

$$(21) \quad \sigma = \frac{4}{3} N' (2\pi)^{3/2} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{Mc} \right)^2 (\mu_N - \mu_P)^2 \sqrt{\varepsilon} (\varepsilon + \varepsilon_l) \left(\varepsilon \frac{v^2}{3} - \frac{\alpha^2}{\beta_v^2} \right)^2 \left(\frac{\alpha x}{\beta_v^2} \right)^3 \exp[-v^2 \varepsilon],$$

x ha il solito significato, ed abbiamo posto:

$$\beta_v^2 = \alpha^2 + \frac{x^2}{2v^2}, \quad x^2 \varepsilon = k_q^2 = \frac{2m_r}{\hbar^2} (\hbar\omega - |E_l|), \quad x^2 \varepsilon_l = \frac{2m_r}{\hbar^2} |E_L|.$$

È dunque facile riconoscere l'estrema piccolezza di σ .

Vogliamo ora discutere l'altro caso.

4. - Transizioni dovute al campo elettrico.

L'interazione dei nostri tre nucleoni con il campo elettrico della radiazione incidente che descriviamo mediante il potenziale vettore \mathbf{A} è:

$$H'_{ii} = \frac{1}{c} \sum_k e_k \cdot (\mathbf{A}(\mathbf{r}_k) \times \mathbf{v}_k),$$

e_k è la carica del k^{mo} nucleone; \mathbf{v}_k è la velocità del k^{mo} nucleone.

Nell'approssimazione di dipolo elettrico alla quale è lecito limitarsi, il potenziale \mathbf{A} è costante su tutta l'estensione del nucleo. Con la solita normalizzazione si ha:

$$\mathbf{A} = \frac{c}{\omega} \sqrt{2\pi\hbar\omega} \mathbf{n},$$

\mathbf{n} indica il vettore unitario nella direzione di polarizzazione che scegliamo come asse z .

L'interazione si scrive:

$$(22) \quad H'_{il} = \frac{1}{\omega} \sqrt{2\pi\hbar\omega} e \sum_k \frac{1 + \tau_z^{(k)}}{2} v_z^{(k)}.$$

Introdotti con i soliti operatori di simmetria (1) le nuove velocità:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_z^{(s)} = T^s v_z^{(1)}, \\ v'_z = T' v_z^{(1)}, \\ v''_z = T'' v_z^{(1)}, \end{array} \right.$$

la (22) diventa:

$$H'_{il} = \frac{e}{\omega} \sqrt{2\pi\hbar\omega} \left\{ \frac{1}{3} (\tau_z^{(s)} v_z^{(s)} + \tau'_z v'_z + \tau''_z v''_z) + \frac{1}{3} \sqrt{2} v_z^{(s)} \right\}.$$

Nel sistema del baricentro $v_z^{(s)} = 0$ ed inoltre con la definizione (2) delle coordinate si ha ancora:

$$H'_{il} = \frac{1}{3} \frac{e}{\omega} \sqrt{2\pi\hbar\omega} \{ \tau'_z \dot{r}_z + \tau''_z \dot{q}_z \},$$

i punti indicano le derivate rispetto al tempo. Gli operatori \dot{r}_z e \dot{q}_z si possono scrivere anche

$$\dot{r}_z = -i\omega r_z, \quad \dot{q}_z = -i\omega q_z;$$

ci si riduce dunque a:

$$H'_{il} = -i \frac{e}{3} \sqrt{2\pi\hbar\omega} \{ \tau'_z r_z + \tau''_z q_z \}.$$

La sezione d'urto si scrive come di solito

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar c} = |H'_{el}|^2 \varphi_f.$$

Cominciamo col discutere la parte più importante della transizione. Riteniamo cioè lo stato fondamentale completamente simmetrico di spazio

$$\psi_i = \varphi_i^s \xi^a,$$

tenuto conto di (3) e (4)

$$H'_{el} \psi_i = \mp i \frac{e}{3} \sqrt{2\pi\hbar\omega} \{ (\xi'_z q_z - \xi''_z r_z) + \zeta^s (\chi''_z r_z - \chi'_z q_z) \} \varphi_i^s,$$

\mp a seconda che si tratta di H_3 od He_3 .

Lo spin dunque si conserva, non succede altrettanto di quello isotopico.

La transizione relativa allo spin $T = 3/2$ sarà inclusa nella trattazione della dissociazione in tre nucleoni liberi (cfr. n. 5). Con $T = 1/2$ lo stato finale può essere un deutone ${}^3\text{S}$ ed un nucleone libero, il quale per la conservazione del momento angolare deve appartenere ad un'onda P .

Posto per lo stato finale

$$\psi_f = -\varphi_f^s \xi^a + \varphi_f' \xi'' - \varphi_f'' \xi'$$

e, come già abbiamo menzionato nel n. precedente (cfr. (2)),

$$\begin{cases} \varphi_f^s = \sqrt{2} T^s \varphi_f, \\ \varphi_f' = T' \varphi_f, \\ \varphi_f'' = T'' \varphi_f. \end{cases}$$

Se per φ_f scegliamo

$$\varphi_f = \frac{1}{3\sqrt{2}} g(r) \exp [i(\mathbf{k}_a \times \mathbf{q})]$$

ricordando che l'autofunzione di spin dello stato fondamentale del deutone è $\chi''\zeta' = (\xi' - \xi^a)/\sqrt{2}$, tenuto conto di (3) e (4), si ha, per l'elemento di matrice,

$$\int \psi_f^* H'_{ii} \psi_i dv = \pm i \frac{e}{3} \sqrt{\pi \hbar \omega} \int g^*(r) \exp -[i(\mathbf{k}_a \times \mathbf{q})] q_i \varphi_i^s dv,$$

dove si è già sommato sugli spin.

Rimandiamo all'appendice per la valutazione dell'integrale.

Si ha, con una φ^s secondo la (16):

$$(23) \quad x^2 d\sigma = \sqrt{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \mu^4 \left(\frac{\alpha x}{\beta_\mu^2} \right)^3 \varepsilon^{3/2} (\varepsilon + \varepsilon_i) \exp [-\mu^2 \varepsilon] \sin^2 \Theta d\omega,$$

dove

$$\beta_\mu^2 = \alpha^2 + \frac{x^2}{2\mu^2}, \quad x^2 \varepsilon = k_q^2, \quad x^2 \varepsilon_i = \frac{2m_r}{\hbar^2} |E_L|$$

e Θ è l'angolo che il nucleone emesso forma con la direzione dei fotoni incidenti.

Per la sezione d'urto totale si ha:

$$(24) \quad x^2 \sigma = \frac{4}{27} (2\pi)^{3/2} \frac{e^2}{\hbar c} \mu^4 \left(\frac{\alpha x}{\beta_\mu^2} \right)^3 \varepsilon^{3/2} (\varepsilon + \varepsilon_i) \exp [-\mu^2 \varepsilon].$$

La dipendenza esponenziale per grandi energie, è una conseguenza della forma gaussiana scelta per lo stato fondamentale dei nostri nuclei, quando invece si assuma un andamento asintotico esponenziale, la sezione d'urto calerà secondo un'iperbole. Nel caso dell' He_3 bisogna introdurre il ben noto

fattore che tiene conto della repulsione coulombiana dei due protoni. Questo fattore si scrive

$$\frac{2\pi\eta}{\exp(2\pi\eta) - 1}, \quad \text{dove} \quad \eta = \frac{e^2 m_f}{\hbar^2} \frac{1}{k_q}.$$

Per la valutazione numerica si confronti la fig. 1.

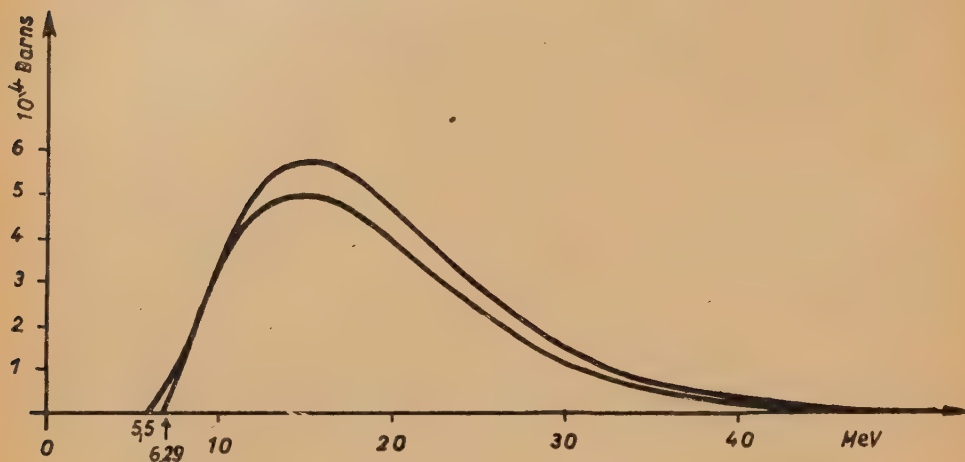


Fig. 1. — Sezione d'urto per la fotodissociazione (transizione elettrica) dell' H_3 (curva superiore) e dell' He_3 (curva inferiore) in funzione dell'energia. Nello stato finale rimane un deutone ${}^3\text{S}$ ed un nucleone libero.

Anche qui si può prendere in considerazione la parte dello stato fondamentale che si riferisce alle autofunzioni di spin ξ' , ξ'' . Per la valutazione degli integrali rimandiamo all'appendice. Omettiamo la formula per ragioni di brevità.

5. — Dissociazione in tre nucleoni liberi.

Per calcolare la sezione d'urto in questo caso occorre badare, nella formula della teoria delle perturbazioni,

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar c} |H'|^2 \rho_f,$$

che la densità degli stati finali ρ_f per i quali si ha un'energia

$$(26) \quad E_f = \hbar\omega - |E_L| = \frac{1}{2m_r} (p_r^2 + p_q^2),$$

essendo \mathbf{p}_r e \mathbf{p}_q gli impulsi corrispondenti alle solite coordinate \mathbf{r} e \mathbf{q} , è:

$$\rho_f = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^6 \frac{k_i^5 dk_i}{dE_f} d\omega_5,$$

$d\omega_5$ è l'elemento dell'angolo solido nello spazio a sei dimensioni dei due impulsi \mathbf{p}_r e \mathbf{p}_q ; $\hbar\mathbf{k}_i$ è l'impulso totale.

Scriveremo anche:

$$\hbar\mathbf{k}_r = \mathbf{p}_r, \quad \hbar\mathbf{k}_q = \mathbf{p}_q.$$

Tenuto conto di (26)

$$\rho_f = \frac{1}{2} \frac{2m_r}{\hbar^2} k_i^4 \frac{d\omega_5}{(2\pi)^6}.$$

Nella transizione magnetica l'elemento di matrice è, analogamente alla (19):

$$M_{fi} = \int \psi_f^* H'_m \psi_i dv = \frac{e\hbar}{Mc} \frac{\mu_P - \mu_N}{3} \sqrt{2\pi\hbar\omega} \int (\varphi_f'^* \varphi' + \varphi'' \varphi_f''^*) dv.$$

Con le solite trasformazioni, facendo uso di (3) e (4),

$$(27) \quad M_{fi} = \frac{e\hbar}{Mc} \frac{(\mu_N - \mu_P)}{3} \sqrt{2\pi\hbar\omega} \int \varphi_f^* \varphi'' dv.$$

Per φ_f dobbiamo porre:

$$\varphi_f = \exp [i(\mathbf{k}_r \times \mathbf{r} + \mathbf{k}_q \times \mathbf{q})].$$

L'integrale della (27) è dunque la trasformata di φ'' , per la quale adopereremo come sempre la forma data nella (17), nello spazio degli impulsi \mathbf{p}_r e \mathbf{p}_q ,

$$\int \varphi_f^* \varphi'' dv = (2\pi)^3 \sqrt{\frac{N'}{3}} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{v}{x}\right)^5 (k_r^2 - k_q^2) \exp \left[-\frac{v^2}{2x^2} (k_r^2 + k_q^2) \right].$$

E la sezione d'urto differenziale

$$d\sigma = \frac{16N'}{27\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^2 (\mu_P - \mu_N)^2 v^{10} \varepsilon^2 (\varepsilon + \varepsilon_i) \left(\frac{k_r^2 - k_q^2}{x^2}\right)^2 \exp [-v^2 \varepsilon] d\omega_5;$$

$$\varepsilon = k_i^2/x^2.$$

Integrando su tutto l'angolo solido $d\omega_5$ si ha la sezione d'urto totale:

$$\sigma = \frac{31 \cdot 16 \cdot N'}{15 \cdot 27} \pi^2 \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^2 (\mu_P - \mu_N)^2 v^{10} \varepsilon^4 (\varepsilon + \varepsilon_i) \exp [-v^2 \varepsilon].$$

Nella transizione elettrica l'elemento di matrice, quando si scelga per lo stato fondamentale la formula più generale,

$$\psi_i = \varphi_i^s \xi^s + \varphi_i' \xi'' - \varphi_i'' \xi'$$

si scrive subito. Basta operare con $(\tau_z' r_z + \tau_z'' q_z)$ su ψ_i

$$(\tau_z' r_z + \tau_z'' q_z) \psi_i = \zeta^s \varphi^s (\chi' q_z - \chi'' r_z) + \zeta^s [(\chi' r_z - \chi'' q_z) \varphi' - (\chi' q_z + \chi'' r_z) \varphi''] + \\ + \xi^s (\varphi' q_z - \varphi'' r_z) + \xi^s (\varphi' r_z + \varphi'' q_z) + \varphi^s (r_z \xi'' - q_z \xi')$$

e valutare nello spazio degli impulsi \mathbf{p}_r e \mathbf{p}_q le trasformate dei momenti

$$I_{r,q}^{(s)} = \int \varphi^s \begin{pmatrix} r_z \\ q_z \end{pmatrix} \exp [-i(\mathbf{k}_r \times \mathbf{r} + \mathbf{k}_q \times \mathbf{q})] dv ; \\ I_{r,q}' = \int \varphi' \begin{pmatrix} r_z \\ q_z \end{pmatrix} \exp [-i(\mathbf{k}_r \times \mathbf{r} + \mathbf{k}_q \times \mathbf{q})] dv ; \\ I_{r,q}'' = \int \varphi'' \begin{pmatrix} r_z \\ q_z \end{pmatrix} \exp [-i(\mathbf{k}_r \times \mathbf{r} + \mathbf{k}_q \times \mathbf{q})] dv ,$$

per le quali rimandiamo all'appendice.

La sezione d'urto differenziale, con $N' = 0$, è:

$$x^2 d\sigma = \frac{4}{9\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \varepsilon^2 (\varepsilon + \varepsilon_l) \frac{(k_r)_z^2 + (k_q)_z^2}{x^2} \mu^{10} \exp [-\mu^2 \varepsilon] d\omega_s .$$

z è la direzione di polarizzazione dell'onda elettromagnetica incidente.

Qui possiamo chiederci la distribuzione angolare relativa all'impulso $\hbar \mathbf{k}_q$.

Si tratta di integrare solo sugli angoli di \mathbf{k}_r (cfr. appendice).

Il risultato dell'integrazione è:

$$(29) \quad x^2 \sigma = \frac{\pi^2}{18} \frac{e^2}{\hbar c} \varepsilon^{1/2} (\varepsilon + \varepsilon_l) \left(\frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{2} \frac{k_q^2}{x^2} \sin^2 \theta \right) \mu^{10} \exp [-\mu^2 \varepsilon] \frac{1}{x^3} d^3 k_q .$$

Limitandosi alla parte simmetrica, indipendentemente dall'energia del nucleone emesso, la sezione d'urto ha dunque la seguente espressione:

$$x^2 d\sigma = \frac{\pi^2}{18} \frac{e^2}{\hbar c} \varepsilon^3 (\varepsilon + \varepsilon_l) \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} \sin^2 \theta \right) \mu^{10} \exp [-\mu^2 \varepsilon] d\omega_k$$

e la sezione d'urto totale

$$x^2 \sigma = \frac{16}{15} \left(\frac{\pi}{3} \right)^3 \frac{e^2}{\hbar c} \varepsilon^3 (\varepsilon + \varepsilon_l) \mu^{10} \exp [-\mu^2 \varepsilon] .$$

6. - Sezioni d'urto per la formazione di H₃ o He₃ in seguito a cattura di un nucleone da parte di un deutone.

Se indichiamo con σ_d la sezione d'urto relativa alla dissociazione e con σ_f quella corrispondente alla formazione, per il rapporto loro, si ha ovviamente:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_d} = \frac{c}{v_N} \cdot \frac{\rho_f g_f}{\rho_d g_d},$$

v_N è la velocità relativa al deutone del nucleone incidente, ρ_f e ρ_d sono le densità degli stati finali rispettivamente per la formazione ed il processo inverso, g_f e g_d sono pesi statistici relativi agli spin

$$g_f/g_d = 4/6.$$

Avendosi

$$\begin{aligned}\rho_f &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{\hbar c} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 d\omega_N, \\ \rho_d &= \frac{p_q^2}{\hbar^2} \frac{1}{\hbar v_N} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 d\omega_f,\end{aligned}$$

per il rapporto precedente si ha:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_d} = \frac{2}{3} \left(\frac{\hbar\omega}{cpq}\right)^2,$$

dove

$$\hbar\omega = \frac{p_q^2}{2m_r} + |E_L| = E_N + |E_L|,$$

e E_N sta per energia cinetica del nucleone incidente nel modo relativo al deutone. Si ha ancora:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_d} = \frac{2}{3} \frac{(E_N + |E_L|)^2}{2m_r E_N c^2} = \frac{3}{8} \frac{(\varepsilon + \varepsilon_i)^2}{\varepsilon} \left(\frac{\hbar x}{Mc}\right)^2.$$

Se ad esempio trascuriamo la transizione per effetto magnetico e riteniamo consistentemente solo la parte completamente simmetrica dell'effetto fotoelettrico, si ha per $d\sigma_f$ l'espressione:

$$x^2 d\sigma_f = \frac{1}{24} \sqrt{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar x}{Mc}\right)^2 \mu^4 \left(\frac{\alpha x}{\beta_\mu^2}\right)^3 \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + \varepsilon_i)^3} \exp[-\mu^2 \varepsilon] \sin^2 \theta d\omega$$

e per la sezione d'urto totale:

$$x^2 \sigma_f = \frac{1}{18} (2\pi)^{3/2} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar x}{Mc}\right)^2 \mu^4 \left(\frac{\alpha x}{\beta_\mu^2}\right)^3 \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + \varepsilon_i)^3} \exp[-\mu^2 \varepsilon].$$

* * *

A proposito di un confronto dettagliato delle formule teoriche delle sezioni d'urto con eventuali dati sperimentali, vogliamo richiamare l'attenzione su due circostanze. La prima riguarda l'andamento generale delle sezioni d'urto con l'energia che è, come abbiamo avuto già occasione di dire, molto sensibile al modo con il quale l'autofunzione degli stati legati va a zero; la seconda riguarda le correzioni che occorre fare alle basse energie per tener conto delle distorsioni delle onde piane provocate dal campo nucleare, e degli eventuali stati virtuali del continuo. Non abbiamo voluto fare una valutazione più accurata degli elementi di matrice; aspettiamo piuttosto che dei buoni dati sperimentali sulle reazioni in discussione possano servire di aiuto per delle formule definitive.

APPENDICE

Per la valutazione degli integrali (28), basta partire dalle trasformazioni di FOURIER delle funzioni:

$$\begin{aligned}\varphi^s &= \exp \left[-\frac{x^2}{2\mu^2} (r^2 + q^2) \right], & \varphi' &= 2(\mathbf{r} \times \mathbf{q}) \exp \left[-\frac{x^2}{2\nu^2} (r^2 + q^2) \right], \\ \varphi'' &= (r^2 - q^2) \exp \left[-\frac{x^2}{2\nu^2} (r^2 + q^2) \right],\end{aligned}$$

le quali sono rispettivamente

$$\begin{aligned}A^s &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int \varphi^s \exp [-i(\mathbf{k}_r \times \mathbf{r} + \mathbf{k}_q \times \mathbf{q})] d\mathbf{v} = \left(\frac{\mu}{x} \right)^6 \exp \left[-\frac{k_t^2}{2x^2} \mu^2 \right]; \\ A' &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int \varphi' \exp [-i(\mathbf{k}_r \times \mathbf{r} + \mathbf{k}_q \times \mathbf{q})] d\mathbf{v} = -\left(\frac{\nu}{x} \right)^{10} 2(\mathbf{k}_r \times \mathbf{k}_q) \exp \left[-\frac{k_t^2}{2x^2} \nu^2 \right]; \\ A'' &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int \varphi'' \exp [-i(\mathbf{k}_r \times \mathbf{r} + \mathbf{k}_q \times \mathbf{q})] d\mathbf{v} = -\left(\frac{\nu}{x} \right)^{10} (k_r^2 - k_q^2) \exp \left[-\frac{k_t^2}{2x^2} \nu^2 \right],\end{aligned}$$

e derivare rispetto a $(k_r)_z$ o $(k_q)_z$ per ottenere

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int \left(\frac{r_z}{q_z} \right) \cdot \varphi^s \exp [-i(\mathbf{k}_r \times \mathbf{r} + \mathbf{k}_q \times \mathbf{q})] d\mathbf{v} &= \frac{1}{i} \left(\frac{\mu}{x} \right)^8 \left(\frac{(k_r)_z}{(k_q)_z} \right) \exp \left[-\frac{k_t^2}{2x^2} \mu^2 \right]; \\ \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int \left(\frac{r_z}{q_z} \right) \varphi' \exp [-i(\dots)] d\mathbf{v} &= -\frac{1}{i} \left(\frac{\nu}{x} \right)^{12} \left(\frac{(k_r)_z}{(k_q)_z} \right) 2(\mathbf{k}_r \times \mathbf{k}_q) \exp \left[-\frac{k_t^2}{2x^2} \nu^2 \right]; \\ \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int \left(\frac{r_z}{q_z} \right) \varphi'' \exp [i(\dots)] d\mathbf{v} &= -\frac{1}{i} \left(\frac{\nu}{x} \right)^{12} \left(\frac{(k_r)_z}{(k_q)_z} \right) (k_r^2 - k_q^2) \exp \left[-\frac{k_t^2}{2x^2} \nu^2 \right]. \end{aligned} \right.$$

Per giungere alla (29) occorre integrare sugli angoli di \mathbf{k}_r . È comodo introdurre a questo scopo le coordinate sferiche zonali in uno spazio a sei dimensioni:

$$\frac{1}{x}(k_a)_x = \sqrt{\varepsilon} t_1, \quad \frac{1}{x}(k_a)_y = \sqrt{\varepsilon} t_2, \quad \frac{1}{x}(k_a)_z = \sqrt{\varepsilon} t_3,$$

$$\frac{1}{x}(k_r)_x = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{T_4} \cos \varphi, \quad \frac{1}{x}(k_r)_y = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{T_4} \sin \varphi, \quad \frac{1}{x}(k_r)_z = \sqrt{\varepsilon} t_4.$$

Dove

$$x^2 \varepsilon = k_t^2 = k_r^2 + k_a^2 \quad \text{e} \quad T_4 = 1 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 - t_4^2,$$

$$-1 \leq t_k \leq +1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

per l'angolo solido $d\omega_5$ si ha:

$$d\omega_5 = \frac{\pi^2}{32} dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 d\varphi.$$

Si tratta di valutare le seguenti medie

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{(k_r)_z^2 + (k_a)_z^2}{x^2} dt_4 d\varphi = \varepsilon \left(\frac{1}{3} + t_3^2 \right), \quad \int \frac{(k_r^2 - k_a^2)^2}{x^4} d\omega_5 = \frac{31}{15} \pi^2 \varepsilon^2.$$

Per mediare rispetto alla direzione della polarizzazione dei quanti γ incidenti, detto θ l'angolo che \mathbf{k}_a forma con la direzione di incidenza ed α il suo azimut misurato dalla direzione di polarizzazione, si ha ovviamente:

$$t_3 = \frac{k_a}{x\sqrt{\varepsilon}} \sin \theta \cos \alpha, \quad t_3^2 = \frac{1}{2} \frac{k_a^2}{x^2 \varepsilon} \sin^2 \theta.$$

Per valutare gli integrali di p. 302 si può passare nello spazio degli impulsi di \mathbf{r} in cui l'autofunzione del deutone ha la forma:

$$\left(\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^{3/2} g(r) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^3 \int \exp \left[-\frac{k_r^2}{4\alpha^2} \right] \exp [i(\mathbf{k}_r \times \mathbf{r})] d^3 k_r.$$

In questo modo basta moltiplicare gli integrali (30) per $\exp \left[-\frac{k_r^2}{4\alpha^2} \right]$ ed integrare rispetto a \mathbf{k}_r per ottenere, ad esempio,

$$\left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int \varphi^s q_z \exp \left[-\frac{k_r^2}{4\alpha^2} \right] \exp [-i(\mathbf{k}_r \times \mathbf{r} + \mathbf{k}_a \times \mathbf{q})] d^3 k_r dv =$$

$$= \frac{1}{i} \left(\frac{\mu}{x} \right)^8 (k_a)_z \exp \left[-\frac{k_a^2}{2x^2} \mu^2 \right] \left(\frac{\pi}{\beta_\mu} \right)^{3/2};$$

$$\left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int \varphi' r_z \exp \left[-\frac{k_r^2}{4\alpha^2} \right] \exp [-i(\dots)] d^3 k_r dv =$$

$$= -\frac{1}{i} \left(\frac{\nu}{x} \right)^{12} (k_a)_z \exp \left[-\frac{k_a^2}{2x^2} \nu^2 \right] \left(\frac{\pi}{\beta_\nu} \right)^{3/2} \frac{1}{\beta_\nu};$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \varphi'' q_z \exp\left[-\frac{k_r^2}{4\alpha^2}\right] \exp[-i(\dots)] d^3k_r dv = \\ = -\frac{1}{i} \left(\frac{v}{x}\right)^{12} (k_a)_z \exp\left[-\frac{k_a^2}{2x^2} v^2\right] \left(\frac{\pi}{\beta_r}\right)^{3/2} \left\{\frac{3}{2\beta} - k_a^2\right\}; \end{aligned}$$

dove

$$\beta_\mu = \frac{\mu^2}{2x^2} + \frac{1}{4\alpha^2}, \quad \beta_\nu = \frac{v^2}{2x^2} + \frac{1}{4\alpha^2}.$$

E questi sono i soli tipi di integrali che si presentano.

SUMMARY

The photodisintegration and the formation by radiative capture of the two nuclei H_3 and He_3 are well suited to give information on the configuration of these nuclei and on the nature of nuclear forces. In this paper we have treated the problem theoretically. We have systematically taken into account the symmetry properties in ordinary space and in the spin and isotopic spin spaces. In the first section we give the formalism which we have used. In the second we discuss the spacial configuration of the ground state of H_3 and He_3 which appears to be predominantly totally symmetric in the space coordinates. In the third section we discuss the magnetic transition into a final state which consists of a 3S deuteron and a free nucleon. This transition is forbidden for configurations totally symmetrical in space. This accounts for the observed low capture cross section for thermal neutrons on deuterons. In the fourth section we calculate the electric transition into a final state consisting of a 3S deuteron and a nucleon. Fig. 1 gives the numerical results for the total cross section. In section five we have considered the case of the direct transition into three free nucleons. In the last section we present the formulae for the cross section of the capture of a nucleon by a 3S deuteron. Eventual comparison with experiment is discussed in the concluding remarks.

Sull'effetto barometrico negli sciami estesi atmosferici.

C. CASTAGNOLI, A. GIGLI ⁽¹⁾ e S. SCIUTI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R., Roma

(ricevuto il 28 Marzo 1950)

Riassunto. — Si espongono i risultati su misure di correlazione tra sciami atmosferici e pressione atmosferica effettuate al Laboratorio della Testa Grigia (3500 m s.l.d.m.). I coefficienti barometrici trovati sono $\beta = 9,8 \% \div 10,6 \%$ per una base di 4,7 m e $\beta = 9,2 \% \div 9,7 \%$ per una base di 6 m.

1. — Introduzione.

Nei mesi da gennaio ad agosto del 1949, al Laboratorio della Testa Grigia (3500 m s.l.m.), in concomitanza con altre esperienze sugli sciami estesi atmosferici ⁽²⁾ effettuate con quattro camere di ionizzazione e contatori di GEIGER-MÜLLER, sono stati raccolti dati relativi alla variazione di frequenza degli sciami estesi con la pressione atmosferica.

Sull'effetto barometrico sono state rese note nel 1939 misure effettuate al Pic du Midi (2860 m s.l.m.) da AUGER e coll. ⁽³⁾ contando coincidenze doppie tra 2 contatori di 220 cm² posti alla distanza di 2 m. Si dimostrava così che al diminuire della pressione le frequenze aumentano notevolmente e, ponendo:

$$(1) \quad \frac{\Delta f}{f} = -\beta \Delta p$$

(dove f = frequenza sciami, Δf = variazione di frequenza per effetto di una variazione Δp di pressione), si trovava un coefficiente barometrico $\beta = 0,15$

⁽¹⁾ Assistente presso l'Istituto di Fisica dell'Università di Pavia, momentaneamente presso il Centro di Fisica Nucleare con una Borsa di Studio del C.N.R.

⁽²⁾ E. AMALDI, C. CASTAGNOLI, A. GIGLI e S. SCIUTI (in corso di pubblicazione).

⁽³⁾ P. AUGER, J. ROBLEY e J. PLUVINAGE: *Compt. Rend.*, **209**, 536 (1939).

per l'aumento di pressione di 1 cm di Hg. Misure successive ⁽⁴⁾ condotte con lo stesso dispositivo sperimentale, davano un $\beta = 0,11$ valutato in modo non specificato dai tre valori sperimentali, $0,11 \pm 0,01$; $0,10 \pm 0,03$; $0,15 \pm 0,03$.

Queste misure, che sono le uniche effettuate in quota, non si possono però ritenere molto probative sia per il basso numero di coincidenze registrato sia per la insufficiente distanza tra i contatori (2 metri) che non permette di attribuire le coincidenze ai soli sciami estesi.

A quest'ultima osservazione non è soggetta invece la misura effettuata al livello del mare da COSYNS ⁽⁵⁾; su basi di 12 m e 18 m, con contatori di 120 cm², egli otteneva un coefficiente barometrico rispettivamente dell'8 % \pm 3 % e del 16 % \pm 3 %. Il numero di eventi registrato da questo Autore (circa 3000) rende molto incerto il suo dato sia per il forte errore statistico sia per il numero notevole di casuali. L'altra misura di COSYNS su una base di 0,3 m (e che portava a un $\beta = 0,04 \sim 0,05$) non può esser ritenuta molto significativa sempre per la insufficiente distanza tra i contatori. È da notare inoltre che sia nelle misure di AUGER che in quelle di COSYNS le letture dei dati venivano effettuate solo ogni 24 ore, quindi senza seguire strettamente la correlazione tra i due eventi.

Nel 1942, in quattro distinte serie di misure, AUGER e DAUDIN ⁽⁴⁾, registrando coincidenze doppie tra contatori posti a 3 m di distanza (e di superficie diversa nelle varie misure) sopra un totale di 35000 sciami e sulla scorta di una rielaborazione dei dati sperimentali intesa a facilitarne il confronto, pervenivano ad una valutazione di β del 9 % \pm 1 % per cm di Hg. Ponendo poi i contatori ad una distanza di 13 m si otteneva $\beta = 0,23 \pm 0,05$ e tale forte differenza del coefficiente barometrico al variare della base era dagli autori ritenuta in buon accordo con i risultati di COSYNS.

Anche per le misure di PATANÈ ⁽⁶⁾ (al l.d.m.), su 2100 coincidenze quaduple fra contatori posti a m 2,50 di distanza (e che portavano a un β uguale a $0,10 \pm 0,04$) vale l'osservazione precedentemente fatta sull'insufficiente distanza tra i contatori. Una successiva misura di PATANÈ, con un coefficiente barometrico valutato a 7 % \pm 4 % è da ritenere poco precisa per il basso numero di coincidenze contate (1500). I dati riportati mettono comunque in rilievo il fatto che l'effetto barometrico, pur basandosi su misure poco precise, risulta elevato e di segno negativo ed in buon accordo, almeno come ordine di grandezza, con la valutazione teorica di COCCONI ⁽⁷⁾. È da osservare però che il confronto tra dati sperimentali e teoria risulta difficile, anzi poco significativo, a causa della diversità dei dispositivi usati dai vari autori.

⁽⁴⁾ P. AUGER e J. DAUDIN: *Phys. Rev.*, **61**, 91 (1942).

⁽⁵⁾ M. G. E. COSYNS: *Nature*, **165**, 668 (1940).

⁽⁶⁾ S. PATANÈ: *Nuovo Cimento*, **11**, 169 (1942).

⁽⁷⁾ G. COCCONI: *Nuovo Cimento*, **5**, 228 (1947).

È evidente quindi l'utilità di determinare con maggior precisione il coefficiente barometrico valutato a tutt'oggi solo come compreso tra il 10 % e il 20 % per cm di Hg ⁽⁸⁾, istituendo una serie di misure in quota e al livello del mare, sempre con lo stesso apparato sperimentale ad elevato potere risolutivo, e con contatori disposti su una base abbastanza larga da assicurare la effettiva registrazione dei soli sciami estesi. In tal caso è possibile effettuare un buon confronto tra previsioni teoriche e risultati sperimentali (soprattutto per quanto riguarda la variazione di β con l'altezza). Per verificare poi la variazione di β con la densità degli sciami è opportuno usare contemporaneamente due dispositivi sensibili a sciami di diversa densità.

2. - Dispositivo sperimentale.

Il sistema di rivelazione degli sciami da noi usato era costituito (v. fig. 1) da tre gruppi a , b , c , di contatori posti ai vertici di un triangolo di 6 m di base e da un quarto contatore d posto all'incirca nel centro del triangolo.

Le superfici dei gruppi di contatori a , b , c e d erano rispettivamente di ~ 900 e 100 cm^2 . Gli impulsi di ogni gruppo di contatori venivano inviati ad un circuito di coincidenza a diodo attraverso un C.I.C. (circuito ingresso coincidenze) del tipo descritto da QUERCIA-RISPOLI ⁽⁹⁾.

Il potere risolutivo della registrazione di coincidenza era di $6,5 \text{ } \mu\text{s}$. Venivano contate coincidenze triple $a + b + c$ sensibili a sciami di densità superficiale dell'ordine o superiore a circa $30 \text{ particelle/m}^2$ e coincidenze quaduple $a + b + c + d$ relative a sciami di densità superficiale dell'ordine o superiore a circa $300 \text{ particelle/m}^2$.

Una ulteriore serie di misure venne eseguita con lo stesso dispositivo sperimentale sulla base di $4,7 \text{ m}$.

3. - Risultati.

I rilievi venivano fatti ogni ora circa e le misure si sono protratte durante i mesi invernali e i mesi estivi; per questa ragione non si è eseguita nessuna correzione per effetto di temperatura (che d'altra parte, se esiste, è molto

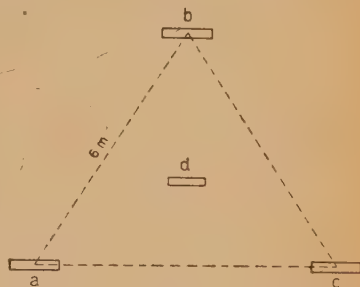


Fig. 1.

⁽⁸⁾ L. JANOSSY: *Cosmic Rays* (Oxford Press, 1948), pag. 332.

⁽⁹⁾ I. F. QUERCIA e B. RISPOLI: *Nuovo Cimento*, **6**, 63 (1949).

piccola) perchè le relazioni tra effetto barometrico e temperatura sono opposte in inverno ed in estate. L'oscillazione di pressione durante questo periodo era compresa tra 483 e 508 torr, con un valore medio di 498,6 torr.

I dati (relativi ad intervalli di pressione di 1 torr), sono stati elaborati seguendo le abituali formule. Indicando con

$$n_i, \quad t_i, \quad p_i$$

rispettivamente il numero di sciami nell' i -esimo ($i = 1 \dots m$) intervallo di misura, la sua durata e la pressione barometrica media nell'intervallo stesso e, ponendo:

$$\Delta n_i = n_i - t_i \frac{\frac{\sum_1^m n_k}{\sum_1^m t_k}}{1},$$

$$\Delta p_i = p_i - \frac{\frac{\sum_1^m p_k t_k}{\sum_1^m t_k}}{1},$$

l'espressione che fornisce il coefficiente barometrico per 1 cm Hg è data da

$$\beta = \frac{100}{76} \frac{\frac{\sum_1^m \Delta n_k \Delta p_k}{\sum_1^m t_k \Delta p_k^2} \cdot 1}{\frac{\sum_1^m n_k / m}{1}}.$$

Nella tabella I sono dati i risultati (relativi alle grandezze più interessanti) delle quattro misure eseguite.

TABELLA I.

Base		$t = \sum_{(min) 1}^m t_k$	$\sum_1^m n_k$	$\frac{\sum_1^m n_k}{\sum_1^m t_k}$	$\frac{\sum_1^m p_k t_k}{\sum_1^m t_k}$	β (%)	λ
6 metri	III	25.900	105.562	4,08 \pm 0,01	498,6	9,70 \pm 1,9	115,0
	IV	26.575	21.283	0,801 \pm 0,005	498,6	9,2 \pm 1,0	121,3
4,7 metri	III	5.243	22.059	4,21 \pm 0,03	498,9	10,6 \pm 1,3	105,2
	IV	5.363	4.578	0,854 \pm 0,01	498,9	9,8 \pm 3,0	113,8

L'errore sul coefficiente barometrico è stato calcolato con la formula:

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \Delta n \sqrt{\frac{\sum_1^m \Delta p_k^2 t_k}{\sum_1^m \Delta n_k \Delta p_k}}$$

in una approssimazione in cui si stima piccolo l'errore nella determinazione della pressione. La fig. 2 che riassume le misure eseguite permette di ricavare più semplicemente il coefficiente barometrico; si ha in questo modo:

$$\text{Base } 6 \text{ m: } \beta_{\text{III}} = 10,1 \% ; \quad \beta_{\text{IV}} = 9,1 \%$$

$$\text{Base } 4,7 \text{ m: } \beta_{\text{III}} = 10,0 \% ; \quad \beta_{\text{IV}} = 10,0 \%$$

Abbiamo anche calcolato il coefficiente di correlazione r tra pressione e frequenza degli sciami; secondo la normale teoria della correlazione:

$$r = \frac{\sum_1^m \Delta n_k \Delta p_k}{\sqrt{\sum_1^m \Delta p_k^2 t_k \sum_1^m \frac{\Delta n_k^2}{t_k}}}$$

Nel nostro caso si ha:

$$\text{Base } 6 \text{ m: } r_{\text{III}} = 0,92, \quad r_{\text{IV}} = 0,90,$$

$$\text{Base } 4,7 \text{ m: } r_{\text{III}} = 0,99, \quad r_{\text{IV}} = 0,79.$$

La correlazione è quindi molto stretta, ed essendo $r \sim 1$, appare giustificata la posizione (1).

Assumendo come unità di radiazione nell'aria il valore 36 g/cm^2 , si ottiene come coefficiente di assorbimento per sciami atmosferici i valori dati nell'ultima colonna della tab. I.

4. - Conclusioni.

L'esame dei dati della tab. I conferma la presenza di un forte effetto barometrico negativo. Data la geometria, del dispositivo, il basso numero di casuali dovute all'elevato potere risolutivo e l'elevato numero di coincidenze registrate sopra un notevole intervallo di pressione, i nostri dati sembrano dare un risultato di attendibilità maggiore che non i precedenti.

Il valore del coefficiente barometrico da noi calcolato, è d'altra parte con-

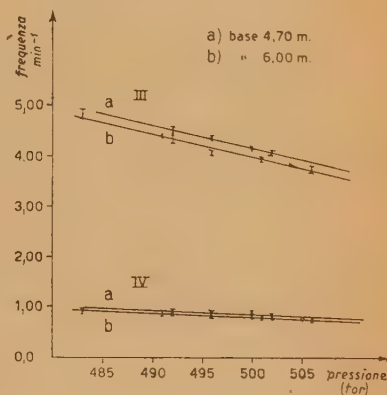


Fig. 2.

fermato dalle recenti misure di DAUDIN-DAUDIN ⁽¹⁰⁾ e CLAY ⁽¹¹⁾ a noi pervenute mentre la presente nota era in corso di pubblicazione. DAUDIN e DAUDIN hanno infatti effettuato misure contando doppie e triple a 50 m s.l.m. e a 2 860 m s.l.m., ottenendo un coefficiente barometrico ponderato di $9,5\% \pm 2\%$ per cm Hg e di $10,2\% \pm 2\%$ rispettivamente.

CLAY ottiene un coefficiente barometrico del 13% per cm Hg usando quattro contatori posti ai vertici di un quadrato.

Tutti questi dati si possono ritenere in ottimo accordo con la valutazione teorica dell'effetto fatta da JANOSSY e da COCCONI. JANOSSY ⁽⁸⁾, basandosi sui dati di HILBERY sull'effetto di altezza degli sciame estesi trova un coefficiente barometrico del $9,3\%$ per cm Hg; COCCONI ⁽⁷⁾ calcolando l'effetto per un dispositivo rivelatore analogo a quello da noi usato e sulla base della teoria della cascata elettronica, trova un coefficiente $\beta = 0,11$ o $= 0,125$ a seconda che si assuma come esponente dello spettro primario

$$\gamma = 1,5 \quad \text{oppure} \quad \gamma = 1,7.$$

L'apparente contraddizione tra le previsioni teoriche e i dati sperimentali sulla variazione di β al variare della distanza tra i contatori si può ritenere invece oggi superata ⁽¹⁰⁾, mentre l'ampiezza dell'errore non permette di decidere sulla variazione o meno di β con l'altezza.

È per chiarire questo punto che sono in corso nuove misure al l.d.m.

Al prof. AMALDI rivolgiamo i nostri ringraziamenti per gli aiuti e consigli datici durante l'esecuzione della presente ricerca.

⁽¹⁰⁾ A. DAUDIN e J. DAUDIN: *Journ. de Phys. et le Radium*, **10**, 394 (1949).

⁽¹¹⁾ J. CLAY: *Proc. K. Ned. Akad. Wed.*, **52**, 450 (1949).

SUMMARY

We report the results of correlation measurements between air extensive showers and atmospheric pressure at 3 500 m above s.l. The barometric coefficients obtained are $9,8\% \div 10,6\%$ for a 4,7 m base and $9,2\% \div 9,7\%$ for a 6,0 m base.

Sullo spostamento del livello $2S_{1/2}$ dell'Idrogeno.

G. MORPURGO

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R., Roma

(ricevuto il 28 Marzo 1950)

Riassunto. — Si cerca se lo spostamento elettromagnetico del livello $2S_{1/2}$ dell'H abbia o meno un qualche effetto classico corrispondente nel senso del principio di corrispondenza di BOHR, o sia invece un effetto necessariamente collegato alla quantizzazione del sistema atomico e del campo di radiazione. Con un calcolo basato sulla teoria delle perturbazioni di BORN-BRODY (a mezzo cioè delle variabili di azione e di fase) si mostra come, almeno nella seconda approssimazione in uno sviluppo in serie di e , l'effetto sia una conseguenza della quantizzazione. Ciò è in accordo con le idee di WELTON.

Lo spostamento del livello $2S_{1/2}$ dell'Idrogeno è stato oggetto di numerosi lavori ⁽¹⁾; a parte un lavoro di WELTON ⁽²⁾ di cui ci occuperemo più oltre, le ricerche in questione hanno mostrato come, sulla base dei procedimenti sottrattivi relativisticamente invarianti di SCHWINGER-TOMONAGA si possa giustificare il taglio da BETHE ⁽¹⁾ compiuto sulle energie dei quanti virtuali maggiori di $\sim mc^2$. Non risulta tuttavia chiaro da tali lavori se lo spostamento considerato, che viene ad essere interpretato come un effetto di reazione della radiazione in quanto è dovuto all'interazione tra elettrone e campo di radiazione all'elettrone stesso associato ⁽³⁾, abbia o meno un qualche effetto classico corrispondente; una discussione di questo punto costituirà l'oggetto del presente lavoro.

⁽¹⁾ H. A. BETHE: *Phys. Rev.*, **72**, 339 (1947); W. E. LAMB jr. e N. M. KROLL: *Phys. Rev.*, **75**, 388 (1949); J. B. FRENCH e V. F. WEISSKOPF: *Phys. Rev.*, **75**, 1240 (1949).

⁽²⁾ T. A. WELTON: *Phys. Rev.*, **73**, 1271 (1948).

⁽³⁾ A parte gli effetti di polarizzazione del vuoto e di interazione anomala tra i momenti magnetici.

È anzitutto evidente che, se non si quantizza in alcun modo nè il sistema materiale (ad es., atomo di H), nè il campo elettromagnetico, l'effetto stesso non può sussistere, e ciò per la semplice ragione che, non esistendo livelli energetici, non si potrà parlare di uno spostamento di tali livelli. In ciò l'effetto considerato differisce da altri effetti dovuti all'interazione elettrone-campo elettromagnetico (ad es., emissione di radiazione da parte di un elettrone in uno stato eccitato) che hanno invece un analogo classico.

Sebbene dunque l'effetto considerato non abbia, nel senso vero e proprio della parola, un analogo classico, la seguente questione *puramente* classica della quale mostreremo nel seguito la relazione con l'effetto stesso, ha un significato ben preciso.

Supponiamo che all'istante $t = -\infty$ l'energia del campo di radiazione sia nulla ed il sistema materiale abbia energia E_0 e supponiamo che a tale istante $t = -\infty$ l'interazione tra sistema materiale e campo di radiazione sia nulla, cioè, se vogliamo, che sia nulla la carica dell'elettrone. Se l'interazione rimanesse sempre nulla, l'energia del campo di radiazione resterebbe sempre nulla e l'energia dell'elettrone resterebbe sempre E_0 ; facciamo ora, a partire dall'istante $t = -\infty$ e fino all'istante t al quale noi osserviamo il sistema, crescere adiabaticamente la carica dell'elettrone (ad es., con legge lineare) di modo che nell'intervallo $-\infty \rightarrow t$ essa passi dal valore 0 al valore e attuale. Quale sarà all'istante t l'energia $E_0 + \Delta E$ del sistema complessivo campo di radiazione più sistema materiale (supponendo di aver eliminata la parte longitudinale del campo e la energia relativa)?

Mostreremo nel seguito come la risoluzione (alla BETHE) del problema dello spostamento dei livelli, sia, almeno nel caso di sistemi moltiplicemente periodici, il corrispondente quantistico, nel senso del principio di corrispondenza di BOHR, del posto problema classico, ossia del calcolo della quantità ΔE .

Per mostrare quanto abbiamo detto, cominceremo col calcolare, nel n. 1, l'energia ΔE in questione anzitutto nel caso semplice di un oscillatore armonico lineare, e generalizzeremo nel seguito la cosa ad un sistema moltiplicemente periodico qualsiasi (n. 2). Sottrarremo quindi da ΔE l'energia di un (conveniente) elettrone libero e mostreremo infine come il procedimento perturbativo che si segue secondo BETHE per calcolare lo spostamento dei livelli quantisticamente sia esattamente la traduzione, mediante il principio di corrispondenza di BOHR, dell'accennato calcolo classico.

Prima di iniziare il calcolo, che sarà limitato al caso non relativistico e alla seconda approssimazione in uno sviluppo in serie di e (carica dell'elettrone) notiamo come un calcolo di selfenergie, eseguito secondo criteri corrispondenziali, è stato già compiuto da WEISSKOPF ⁽⁴⁾ nei suoi ben noti lavori sulla self-

(⁴) V. F. WEISSKOPF: *Zeits. f. Phys.*, **9**, 27 (1934); *Phys. Rev.*, **56**, 72 (1939).

energia di un elettrone; tuttavia, a parte il fatto che WEISSKOPF ha calcolato in tal modo la selfenergia di un elettrone obbediente all'equazione di DIRAC, egli ha fatto uso, non del principio di corrispondenza di BOHR nella sua forma primitiva, come faremo qui noi, bensì dei criteri corrispondenziali di KLEIN-HEISENBERG ⁽⁵⁾; è ben noto, come afferma WEISSKOPF stesso nel citato lavoro, come tali criteri corrispondenziali prendano alquanto a torto il nome di criteri « corrispondenziali », non costituendo essi di fatto che una modificazione formale, più aderente al linguaggio classico, dei criteri dell'elettrodinamica quantistica, sebbene storicamente anteriori.

1. - Vogliamo qui svolgere, come abbiamo detto, il calcolo *classico* dell'energia $E_0 + \Delta E$ che un oscillatore armonico lineare, di frequenza ciclica ω_0 , più il campo di radiazione ad esso associato ha all'istante t « attuale » se ad un istante sufficientemente distante (che abbiamo indicato prima con $t = -\infty$) l'oscillatore aveva energia E_0 , l'energia del campo di radiazione essendo a tale istante nulla, e se la carica, è andata inserendosi adiabaticamente col tempo.

L'hamiltoniano del nostro sistema si scrive notoriamente:

$$(1) \quad H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{cV^{1/2}} \mathbf{A}_{tr} \right)^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2} \sum_{kr} (c^2 p_k^{(r)} p_k^{(r)*} + k^2 q_k^{(r)} q_k^{(r)*})$$

quando si sia già eliminata la parte longitudinale del campo con la solita trasformazione canonica. Le variabili \mathbf{p} , \mathbf{x} (coordinate dell'oscillatore) e $p_k^{(r)}$, $q_k^{(r)}$ (coordinate trasversali del campo) sono da intendersi, lo ripetiamo, come variabili canoniche classiche; il simbolo \mathbf{A}_{tr} (parte trasversale del potenziale vettore) sta per:

$$(2) \quad \mathbf{A}_{tr} = \sum_{kr} \mathbf{e}_k^{(r)} q_k^{(r)} \exp [i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] \quad (6).$$

Sviluppando il quadrato in (1) si vede facilmente che, per il nostro problema, il termine bilineare nelle coordinate q_k del campo ⁽⁷⁾ non ha importanza e lo trascureremo fin d'ora. Se inoltre ci mettiamo, nell'approssimazione di dipolo ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = 0$) l'hamiltoniano H si può riscrivere:

$$H_d = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 - \frac{e}{mc} \frac{1}{V^{1/2}} \sum_k (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_k) q_k + \frac{1}{2} \sum_k (c^2 p_k^2 + k^2 q_k^2)$$

⁽⁵⁾ W. HEISENBERG: *Ann. der Phys.*, **9**, 338 (1931).

⁽⁶⁾ Per le altre notazioni che non siano ovvie, si veda il libro di G. WENTZEL: *Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder* (F. Deuticke, 1943), pag. 120 e segg.

⁽⁷⁾ Sottintenderemo d'ora in avanti l'indice di polarizzazione r .

e si tratta di calcolare a partire dalle equazioni del moto del nostro sistema, la quantità ΔE più sopra definita.

Notiamo allora che il sistema « imperturbato » di hamiltoniana:

$$H_0 = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2} \sum_k (c^2 p_k^2 + k^2 q_k^2)$$

è un sistema multiplamente periodico ⁽⁸⁾; di modo che, per il teorema di adiabaticità di EHRENFEST, il calcolo di ΔE si eseguirà nel modo più semplice descrivendo il nostro sistema (sistema materiale più campo di radiazione) anzichè usando le variabili \mathbf{p} , \mathbf{x} , p_k , q_k , mediante variabili di azione e di fase, tanto per l'oscillatore materiale, quanto per gli oscillatori di radiazione; infatti, in virtù della supposta variazione adiabatica della carica, descritto il nostro sistema mediante variabili di azione, queste conserveranno per il teorema di EHRENFEST i loro valori iniziali durante tutto l'inserimento della perturbazione di modo che, tenendo conto (alla rovescia) di una osservazione di SCHRÖDINGER, basterà, per calcolare ΔE , applicare la teoria delle perturbazioni di BORN-BRODY ⁽⁹⁾ al presente problema, considerando come termine perturbativo la quantità:

$$(3) \quad H^{(1)} = -\frac{e}{mc} \frac{1}{V^{1/2}} \sum_k (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_k) q_k = -\frac{e}{mc} \frac{1}{V^{1/2}} \sum_k (\mathbf{e}_k \cdot \boldsymbol{\xi}) p q_k,$$

$\boldsymbol{\xi}$ essendo un versore nella direzione dell'asse x secondo cui l'oscillatore lineare oscilla.

⁽⁸⁾ Si tratta di un sistema ad infiniti gradi di libertà; noi lo tratteremo formalmente alla stregua dei sistemi periodici ad un numero finito di gradi di libertà. Il fatto che i risultati cui il calcolo perturbativo condurrà siano divergenti, implica in effetti la non applicabilità della teoria delle perturbazioni; tuttavia ciò sussiste tanto per il presente calcolo quanto per il calcolo quantistico. Nell'un caso e nell'altro l'applicazione della teoria delle perturbazioni ha valore puramente formale.

Poichè d'altra parte la divergenza dei risultati è dovuta al numero troppo grande di oscillatori di radiazione alle alte frequenze, si può pensare che se, per una qualche ragione, questi oscillatori di alta frequenza avessero un « peso » minore del loro peso statistico (in modo che i risultati convergessero), la applicazione della teoria delle perturbazioni sarebbe senz'altro giustificata.

È questo lo spirito di un noto lavoro di R. P. FEYNMANN (*Phys. Rev.*, **74**, 1430 (1948)) in cui si mostra come la possibilità di un « taglio » relativisticamente invariante sussista e dia risultati in accordo con i procedimenti sottrattivi. È da notarsi ancora che, dato che il procedimento di aumento adiabatico della carica è in ogni caso equivalente al calcolo mediante la teoria delle perturbazioni, se quest'ultima ha soltanto valore formale, anche il procedimento di aumento adiabatico lo ha.

⁽⁹⁾ Si consulti, per tutto quanto concerne la teoria delle perturbazioni classica il libro di M. BORN: *Vorlesungen über Atommechanik*.

Introduciamo dunque variabili di azione e fase (di approssimazione zero) J_{0k} e w_{0k} per gli oscillatori del campo di radiazione e J_{00} , w_{00} per l'oscillatore lineare; esse sono collegate alle coordinate p , x , p_k , q_k dalle relazioni seguenti:

$$(4) \quad x = \sqrt{\frac{J_{00}}{\pi\omega_0 m}} \sin 2\pi w_{00}, \quad p = \sqrt{\frac{J_{00}\omega_0 m}{\pi}} \cos 2\pi w_{00},$$

$$(5) \quad q_k = \sqrt{\frac{cJ_{0k}}{k\pi}} \sin 2\pi w_{0k}, \quad p_k = \sqrt{\frac{kJ_{0k}}{c\pi}} \cos 2\pi w_{0k}.$$

Tenute presenti le formule della teoria delle perturbazioni di BORN-BRODY, (l'idea di tale teoria, consiste, com'è noto, nell'effettuare una trasformazione canonica, sviluppandola in serie di un parametro, che faccia passare dalle variabili di azione e fase per il sistema imperturbato a variabili di azione e fase per il sistema perturbato), si ha:

1) la correzione all'energia di prima approssimazione (proporzionale ad e), che si ottiene inserendo nell'espressione (3) le (4) (5) al posto di p , q_k e mediando rispetto al tempo è nel nostro caso nulla.

2) La correzione all'energia di seconda approssimazione (proporzionale ad e^2) è data in generale da:

$$(6) \quad W_2 = -\frac{1}{2} \sum_{(\tau\nu_0)} \sum_k \tau_k \frac{\partial}{\partial J_k} \frac{|H_{\tau}^{(1)}|^2}{(\tau\nu_0)},$$

dove:

a) $\sum_{(\tau\nu_0)}$ indica una somma estesa a tutti i possibili valori dell'espressione $(\tau\nu_0) \equiv \sum_s \tau_s \nu_{0s}$, ν_{0s} essendo le frequenze dei vari gradi (s) di libertà del sistema e τ_s essendo un sistema di numeri interi, positivi e negativi qualsiasi;

b) per ogni determinazione di $(\tau\nu_0)$ la somma rispetto a k , che viene ad avere un significato perfettamente definito, va estesa a tutti i gradi di libertà;

c) $H_{\tau}^{(1)} \equiv H_{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_s}^{(1)}$ sono i coefficienti dello sviluppo di $H^{(1)}$ in serie di FOURIER rispetto alle variabili angolari $w_{00}, w_{01}, \dots, w_{0s}, \dots$, quando al posto di p , q_k siano state inserite nella (3) le loro espressioni (4) e (5) e le variabili di azione J_{00} , J_{0k} , per il sistema imperturbato si pensino sostituite con le variabili di azione J_0 , J_k corrette fino all'ordine e^2 per il sistema perturbato.

Indicando con τ_0 l'indice riferentesi al sistema materiale (oscillatore) e con τ_k quello riferentesi all'oscillatore di radiazione di frequenza ciclica ck , risulta facilmente che gli unici $H_{\tau}^{(1)}$ diversi da zero sono quelli per cui soltanto uno dei τ_k è diverso da zero, ed eguale a ± 1 , e contemporaneamente è $\tau_0 = \pm 1$.

Si ha più esplicitamente:

$$(7) \quad \begin{cases} H_{100 \dots 1_k 0 \dots}^{(1)} = H_{-100 \dots 1_k 0 \dots}^{(1)} = -\frac{e}{2m} \frac{1}{2i} (e_k \xi) \sqrt{\frac{J_k c}{k\pi}} \sqrt{\frac{\omega_0 m J_0}{\pi}}, \\ H_{100 \dots -1_k 0 \dots}^{(1)} = H_{-100 \dots -1_k 0 \dots}^{(1)} = +\frac{e}{2m} \frac{1}{2i} (e_k \xi) \sqrt{\frac{J_k c}{k\pi}} \sqrt{\frac{\omega_0 m J_0}{\pi}}, \end{cases}$$

tutti gli altri $H_r^{(1)}$ essendo nulli.

Nelle (7) il primo indice si riferisce al valore di τ_0 , gli altri a quelli dei τ_k .

Si trova allora per W_2 , indicando con c_k il valore comune, a parte il segno, delle espressioni (7):

$$(8) \quad W_2 = -\sum_k \left(\frac{\partial}{\partial J_0} \frac{|c_k|^2}{\nu_0 + \nu_k} + \frac{\partial}{\partial J_k} \frac{|c_k|^2}{\nu_0 + \nu_k} + \frac{\partial}{\partial J_0} \frac{|c_k|^2}{\nu_0 - \nu_k} + \frac{\partial}{\partial J_k} \frac{|c_k|^2}{\nu_k - \nu_0} \right),$$

dove si è posto:

$$\nu_k = \frac{ck}{2\pi}, \quad \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi},$$

e dove la somma si intende ora estesa a tutti gli oscillatori di radiazione e per ciascuno di essi alle due direzioni di polarizzazione. Tenendo presente che le J_k sono nulle in quanto è nulla l'energia associata inizialmente al campo di radiazione e che è $E_0 = \nu_0 J_0$ si ottiene ⁽¹⁰⁾:

$$W_2 = -\frac{2}{3\pi} \frac{e^2 E_0}{mc^3} \int_0^\infty \frac{u^2 du}{u^2 - \omega_0^2}.$$

Se esprimiamo E_0 mediante il valor medio rispetto ad un periodo del quadrato dell'impulso « imperturbato » \bar{p}^2 , risulta:

$$(9) \quad W_2 = -\frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{m^2 c^3} \bar{p}^2 \int_0^\infty \frac{u^2 du}{u^2 - \omega_0^2}.$$

La formula soprascritta (9) può essere specializzata al caso di un elettrone libero facendovi tendere ω_0 a zero. Detto \bar{p} l'impulso dell'elettrone si ha in tal caso:

$$(10) \quad W_2' = -\frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{m^2 c^3} \bar{p}^2 \int_0^\infty du.$$

⁽¹⁰⁾ Si è moltiplicato per un fattore 4π per passare dalle unità di HEAVISIDE a quelle normali.

La formula (9) risolve in seconda approssimazione il problema classico che ci siamo inizialmente proposti: rappresenta cioè, fino alla seconda approssimazione per e , quello che è l'incremento ΔE di energia di un oscillatore armonico di frequenza ω_0 ed energia iniziale E_0 , e del campo elettromagnetico ad esso associato, quando supposto inizialmente l'oscillatore non carico gli si comunicò adiabaticamente la carica e . W'_2 rappresenta la quantità analoga nel caso di un elettrone non soggetto a forze. Si vede che W'_2 non è altro che la self-energia trasversale di un elettrone libero.

Si osservi che l'estendere le integrazioni nelle (9) e (10) a tutto l'intervallo $0 \rightarrow \infty$ può essere alquanto ingiustificato. Quello che succede quando entrano in giuoco frequenze $\gg mc^2$ non lo possiamo sapere in quanto il calcolo precedente è non relativistico; si vede però facilmente che un taglio a frequenze $\gg \omega_0$ non altera sensibilmente il valore della differenza tra W_2 e W'_2 , nel senso che tale differenza è una quantità sempre assai prossima a zero. Se prendiamo alla lettera la teoria ed estendiamo gli integrali effettivamente tra 0 ed ∞ risulta che la differenza $W_2 - W'_2$ è esattamente nulla; infatti è:

$$(11) \quad W_2 - W'_2 = -\frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{m^2 c^3} \bar{p}^2 \left\{ \int_0^\infty \frac{u^2 du}{u^2 - \omega_0^2} - \int_0^\infty du \right\} =$$

$$= -\frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{m^2 c^3} \omega_0 \bar{p}^2 \left[\frac{1}{2} \log \left| \frac{u - \omega_0}{u + \omega_0} \right| \right]_0^\infty = 0,$$

in quanto è:

$$(12) \quad \log \left| \frac{u - \omega_0}{u + \omega_0} \right| \Big|_0^\infty = 0.$$

Poichè, come vedremo, $W_2 - W'_2$ è l'analogo classico, nel senso del principio di corrispondenza di BOHR della quantità calcolata quantisticamente da BETHE, e che si interpreta come spostamento di livelli, risulta che questo analogo classico è, almeno in seconda approssimazione, in un calcolo non relativistico, e per un oscillatore armonico lineare, nullo. Quindi, sebbene classicamente non si possa parlare di livelli, si può dire tuttavia che l'analogo classico della grandezza che quantisticamente si interpreta come spostamento di livelli è senz'altro nullo.

2. - Si potrebbe pensare che il fattore nullo (12) fosse caratteristico del solo oscillatore armonico lineare, e che per un altro sistema multiplamente periodico, il suddetto analogo classico sia diverso da zero. Ci si può render facilmente conto che ciò non è, e che la differenza $W_2 - W'_2$ è zero per un sistema multiplamente periodico qualsiasi (nelle approssimazioni qui considerate).

Risulta infatti molto facilmente, e non stiamo qui a svolgere il calcolo, che la presenza del fattore nullo (12) è conseguenza del fatto che gli unici $H_r^{(1)}$ diversi da zero sono, cosa che è vera anche per un sistema multiplamente periodico qualsiasi, quelli per cui uno solo dei τ_k è eguale a ± 1 , tutti gli altri τ_k essendo nulli.

Onde facendo esattamente gli stessi passaggi di poco più sopra, si riconosce che la differenza $W_2 - W'_2$ è effettivamente nulla.

3. -- Vogliamo ora mostrare come il calcolo dianzi svolto sia effettivamente l'analogo classico del calcolo quantistico dello spostamento dei livelli compiuto da BETHE.

Ciò è conseguenza del fatto che le formule della teoria delle perturbazioni quantistica possono ricavarsi da quelle della teoria delle perturbazioni classica semplicemente usando il principio di corrispondenza di BOHR. Riportiamo qui per comodità due o tre passaggi che si possono trovare nel noto libro di BORN-JORDAN ⁽¹¹⁾.

Se si adotta il criterio generale di corrispondenza di BOHR di sostituire l'operatore differenziale:

$$\sum_k \tau_k \frac{\partial}{\partial J_k}$$

con una differenza tra quantità finite, criterio che conduce a sostituire, ad es., alla frequenza classica:

$$\nu = \sum_k \tau_k \frac{\partial W}{\partial J_k}$$

la frequenza quantistica:

$$\nu_{n,n-\tau} = \frac{1}{h} \{ W(J_1, J_2, \dots) - W(J_1 - \tau_1 h, J_2 - \tau_2 h, \dots) \}$$

si vede immediatamente, seguendo BORN-JORDAN, che la formula (6) che abbiamo usato per il calcolo di W_2 , W'_2 va sostituita con:

$$(13) \quad W_{2q} = -\frac{1}{h} \sum_{\tau_k > 0} \left(\frac{|H^{(1)}(n + \tau, n)|^2}{\nu_{n+\tau, n}} - \frac{|H^{(1)}(n, n - \tau)|^2}{\nu_{n, n-\tau}} \right) \equiv \sum_{\tau} \frac{|H^{(1)}(n, n - \tau)|^2}{E_n - E_{n-\tau}}.$$

Nella (13) $H_{n,n-\tau}^{(1)}$ indica una quantità, associata allo stato iniziale n e a quello « intermedio » $n - \tau$, che va sostituita ai coefficienti di FOURIER della perturbazione $H^{(1)}$ dati dalla (7). Tale quantità è l'elemento di matrice della per-

⁽¹¹⁾ M. BORN e P. JORDAN: *Elementare Quantenmechanik* (Springer, 1925), p. 11.

turbazione tra gli stati considerati, ed il fatto che siano diversi da zero soltanto i coefficienti di FOURIER per cui uno solo dei τ_k è eguale a ± 1 è evidentemente il « corrispondente » del fatto che sono diversi da zero soltanto gli elementi di matrice relativi a transizioni in cui un solo quanto viene emesso od assorbito.

La (13) è la solita formula della teoria delle perturbazioni stazionaria quantistica e da essa si ricavano le espressioni quantistiche della selfenergia trasversale W_{2q} W'_{2q} date da BETHE.

Il fatto che la differenza $W_{2q} - W'_{2q}$ sia quantisticamente non nulla, (anzi divergente), il fatto cioè che il fattore nullo sia sostituito da un fattore divergente, dipende perciò dalla traduzione quantistica del problema.

E giova a questo proposito discutere un momento il lavoro di WELTON ⁽²⁾ cui abbiamo accennato all'inizio. Cercando una spiegazione intuitiva dell'effetto del campo elettromagnetico sui livelli, WELTON mostra come esso possa essere trovato nell'effetto delle fluttuazioni del campo elettromagnetico, conseguenti alla quantizzazione. Precisamente l'effetto delle fluttuazioni è quello di far variare alquanto l'orbita dell'elettrone e quindi l'energia potenziale del campo di forze in cui esso si viene istante per istante a trovare, dando luogo, se si fanno tagli convenienti, giusto ad un effetto dell'ordine di grandezza osservato (e calcolato da BETHE).

Senza voler discutere se una siffatta pittura sia o meno corretta (è notevole in ogni caso il fatto che essa dia il risultato corretto), quanto abbiamo stabilito ci sembra essere una conferma della premessa su cui il lavoro di WELTON si fonda, e che cioè la sottrazione della selfenergia di un elettrone libero implichi la sottrazione di ogni divergenza di origine classica e che l'effetto stesso sia conseguenza della quantizzazione. Noi abbiamo infatti dimostrato che l'analogo classico dell'effetto considerato, nel senso del principio di corrispondenza, è, nelle approssimazioni specificate, nullo.

Si può volendo vedere la cosa anche in altro modo; il calcolo svolto nel n. 1 può essere alternativamente considerato come un calcolo di quantizzazione del sistema oscillatore più campo elettromagnetico secondo le regole di quantizzazione di SOMMERFELD. La sostanziale differenza tra la quantizzazione usuale e quella secondo le regole di SOMMERFELD consiste nel fatto che queste ultime non contengono il principio di indeterminazione (nel nostro caso, nè per la particella, nè per gli oscillatori di radiazione). Segue che l'effetto di spostamento è associato al principio di indeterminazione.

In quanto precede noi abbiamo, per concludere, dimostrato che il « corrispondente » classico (senza quantizzazione, cioè, nè del sistema materiale nè del campo) dell'effetto di spostamento, è nullo; si potrebbe pensare che una quantizzazione del sistema materiale, lasciando invece non quantizzato il campo di radiazione, potrebbe spiegare l'effetto stesso. Sarebbe, in questo caso, il problema della quantizzazione di un sistema dissipativo che dovremmo

risolvere, in quanto l'oscillatore, irraggiando, perde energia. Ben poco ci risulta sia stato fatto sull'argomento; l'unico lavoro che conosciamo essendo un lavoro di KANAI ⁽¹²⁾ del 1948 sui *Progr. of Theor. Physics.*; torneremo eventualmente in un'altra nota sull'argomento.

Ringrazio vivamente il prof. B. FERRETTI per alcune utili discussioni sull'argomento del presente lavoro.

⁽¹²⁾ E. KANAI: *Progr. of Theor. Physics*, **3**, 440 (1948).

SUMMARY

The question is considered if the electromagnetic shift of $2S_{1/2}$ level of Hydrogen has some classical corresponding effect in the sense of the BOHR correspondence principle; or if, on the contrary it is an effect necessarily associated with the quantization of the radiation field and atomic system. By use of the old BORN-BRODY perturbation theory (introducing action and phase variables) it is shown how, at least in the second e -approximation, the effect is a consequence of the quantization. This conclusion is in agreement with WELTON's ideas.

Sulla dipendenza dalla profondità dello sparpagliamento degli elettroni di uno sciame.

II.

A. BORSELLINO

Istituto di Fisica del Politecnico di Milano

(ricevuto l'11 Aprile 1950)

Riassunto. — Nel presente lavoro viene ripresa la valutazione analitica (in approssimazione « A ») della deflessione quadratica media $\langle \theta^2 \rangle_t$ e dello scostamento laterale quadratico medio $\langle r^2 \rangle_t$ degli elettroni di uno sciame in funzione della profondità. Si mostra che, usando la formula esatta della trasformata di LAPLACE dello spettro differenziale degli elettroni, si ottengono risultati in accordo con le precedenti valutazioni di altri autori e si mette in evidenza una sensibile dipendenza dello sparpagliamento, per gli elettroni di una data energia, dalla profondità dello sciame. Viene inoltre valutata la quantità $\langle \theta r \rangle_t$, che rappresenta l'accoppiamento dello sparpagliamento laterale con quello angolare.

1. — Introduzione.

In un precedente lavoro ⁽¹⁾ ho valutato analiticamente la deviazione quadratica media $\langle \theta^2 \rangle_t$ e lo scostamento laterale quadratico medio $\langle r^2 \rangle_t$ degli elettroni di uno sciame in funzione della profondità e dell'energia (in approssimazione « A »).

I risultati numerici sono stati presentati solo alla profondità t_m del massimo dello sciame. Tuttavia nel corso del calcolo ho fatto uso di una espressione approssimata della trasformata di LAPLACE $\mathcal{L}_\pi(E_0, E, \lambda)$ dello spettro

⁽¹⁾ A. BORSELLINO: *Nuovo Cimento*, 6, 543 (1949). Citato con I. Rimando ad esso per i simboli, che, del resto, sono quelli usati da ROSSI e GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, 13, 262 (1941).

differenziale $\pi(E_0, E, t)$ degli elettroni di energia E (E_0 = energia iniziale dello sciame), valida solo per $E_0 \gg E$. Poichè occorre valutare un integrale del tipo

$$(1) \quad \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'^2} \mathcal{L}_\pi(E_0, E', \lambda) \cdot \mathcal{L}_\pi(E', E, \lambda),$$

si ha un forte contributo all'integrale per $E' \sim E$ e quindi l'approssimazione usata risulta difettosa per $\mathcal{L}_\pi(E', E, \lambda)$. Invece per la presenza del fattore $1/E'^2$ il contributo all'integrale in vicinanza del limite superiore è trascurabile (per $E_0 \gg E$) e quindi l'uso della espressione approssimata per $\mathcal{L}_\pi(E_0, E', \lambda)$ non introduce errore apprezzabile.

Per queste ragioni ⁽²⁾ i risultati numerici dati in I, specie per $\langle \theta^2 \rangle_{tm}$, non sono corretti, e in effetti mostrano una discrepanza con quelli già calcolati da altri autori, che avevano già valutato la stessa quantità per $t = t_m$ ⁽³⁾ oppure i loro valori mediati su tutte le profondità ⁽⁴⁾ ⁽⁵⁾. Nonostante l'insufficienza dell'approssimazione, il calcolo indicava una sensibile dipendenza dello sparpagliamento (degli elettroni di una data energia) dalla profondità.

Mi propongo di far vedere come, utilizzando le espressioni esatte delle trasformate di LAPLACE, il metodo conduca a risultati numerici in accordo con le valutazioni dei precedenti autori e permetta di confermare la dipendenza dello sparpagliamento dalla profondità, già contenuta nei risultati precedenti.

2. - Valutazioni analitiche.

Le quantità che interessa calcolare sono:

$$(2a) \quad \langle \theta^2 \rangle_t = \frac{1}{\pi(E_0, E, t)} \int_E^{E_0} \left(\frac{E_s}{E'} \right)^2 dE' \int_0^t \pi(E_0, E', t') \pi(E', E, t-t') dt',$$

$$(2b) \quad \langle r^2 \rangle_t = \frac{1}{\pi(E_0, E, t)} \int_E^{E_0} \left(\frac{E_s}{E'} \right)^2 dE' \int_0^t \pi(E_0, E', t') \pi(E', E, t-t') (t-t')^2 dt',$$

dove $E_s = 21$ MeV.

⁽²⁾ Questo punto è stato chiarito nel corso di una corrispondenza sull'argomento con il prof. JANOSSY. Alla fine, il prof. JANOSSY, che qui ringrazio, mi comunicava che era pervenuto essenzialmente agli stessi risultati per (2a) e (2b).

⁽³⁾ G. MOLIERE: *Zeits. f. Phys.*, **125**, 250 (1949).

⁽⁴⁾ J. ROBERG e L. NORDHEIM: *Phys. Rev.*, **75**, 444 (1949).

⁽⁵⁾ L. JANOSSY: *Cosmic Rays* (Oxford, 1948).

Può avere interesse ⁽³⁾ anche:

$$(2c) \quad \langle \theta r \rangle_t = \frac{1}{\pi(E_0, E, t)} \int_E^{E_0} \left(\frac{E_s}{E'} \right)^2 dE' \int_0^t \pi(E_0, E', t') \pi(E', E, t-t')(t-t') dt',$$

che rappresenta l'accoppiamento tra lo sparpagliamento angolare e quello laterale.

Procedendo come in I, conviene introdurre ($n = 0, 1, 2$):

$$(3) \quad \Phi_n(E_0, E', E, t) = \int_0^t \pi(E_0, E', t') \pi(E', E, t-t')(t-t')^n dt',$$

che è il prodotto integrale delle funzioni $\pi(E_0, E', t')$ e $\pi(E', E, t-t')$. Si ha allora (teorema della Faltung):

$$(4) \quad \mathcal{L}_{\Phi_n}(E_0, E', E, \lambda) = (-1)^n \mathcal{L}_{\pi}(E_0, E', \lambda) \cdot \frac{\partial^n \mathcal{L}_{\pi}(E', E, \lambda)}{\partial \lambda^n},$$

dove \mathcal{L}_{Φ_n} è la trasformata di LAPLACE della Φ_n , e quindi invertendo:

$$(5) \quad \Phi_n(E_0, E', E, t) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \exp[\lambda t] \mathcal{L}_{\pi}(E_0, E', \lambda) \frac{\partial^n \mathcal{L}_{\pi}(E', E, \lambda)}{\partial \lambda^n} d\lambda.$$

L'espressione esatta (in approssimazione « A ») di $\mathcal{L}_{\pi}(E_0, E', \lambda)$ è

$$(6) \quad \mathcal{L}_{\pi}(E_0, E', \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{E'} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \left(\frac{E_0}{E'} \right)^s \frac{\sigma_0 + \lambda}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} ds$$

e quindi anche:

$$(6') \quad \frac{\partial^n \mathcal{L}_{\pi}(E', E, \lambda)}{\partial \lambda^n} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{E} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \left(\frac{E'}{E} \right)^r \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left\{ \frac{\sigma_0 + \lambda}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} \right\} dr.$$

Per valutare le (2) occorre calcolare ora l'integrale

$$(7) \quad I_n = E_s^2 \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'^2} \Phi_n(E_0, E', E, t).$$

Non si avrebbero maggiori difficoltà analitiche a fare uso di entrambe le espressioni esatte (6); tuttavia i calcoli numerici diventerebbero eccessivamente pesanti. La discussione fatta all'inizio sulla (1) fa vedere che, mentre è necessario utilizzare l'espressione esatta (6') si può prendere per $\mathcal{L}_{\pi}(E_0, E', \lambda)$ l'espressione approssimata già utilizzata in I:

$$(8) \quad \mathcal{L}_{\pi}(E_0, E', \lambda) \cong - \frac{1}{E'} \left(\frac{E_0}{E'} \right)^s \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \frac{1}{\lambda'_1(s)} = \frac{1}{E'} \left(\frac{E_0}{E'} \right)^s \frac{H_1(s)}{-\lambda'_1(s)}$$

che si ottiene considerando il contributo all'integrale (6) che proviene dal polo più a destra sull'asse reale, cioè per $\lambda_1(s) = \lambda$. Questa stessa semplificazione

è d'altra parte utilizzata anche nel calcolo dei valori medi col metodo delle tracce elettroniche ⁽⁴⁾, ⁽⁵⁾.

Si può così scrivere:

$$(9) \quad I_n = \frac{(-1)^n}{4\pi^2} \frac{E_0^2}{E} \int_E^{\frac{E_0}{E}} \frac{dE'}{E'^3} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \exp[\lambda t] \left(\frac{E_0}{E'} \right)^s \frac{H_1(s)}{\lambda_1'(s)} d\lambda \times \\ \times \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \left(\frac{E'}{E} \right)^r \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left\{ \frac{\sigma_0 + \lambda}{[\lambda - \lambda_1(r)][\lambda - \lambda_2(r)]} \right\} dr$$

in cui s è funzione di λ attraverso la relazione $\lambda_1(s) = \lambda$. Scambiando l'ordine di integrazione si può eseguire prima l'integrazione rispetto ad E' , che risulta:

$$(10) \quad \int_E^{\frac{E_0}{E}} \frac{dE'}{E'^{s+3-r}} \cong \int_E^{\infty} \frac{dE'}{E'^{s+3-r}} = \frac{1}{s+2-r} \frac{1}{E^{s+2-r}},$$

se $E_0 \gg E$ e $\operatorname{Re}\{s+2-r\} > 0$.

Si ottiene così:

$$(11) \quad I_n = \frac{(-1)^n}{4\pi^2} \frac{E_0^2}{E^3} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} d\lambda \exp[\lambda t] \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{H_1(s)}{\lambda_1'(s)} \times \\ \times \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{dr}{s+2-r} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left\{ \frac{\sigma_0 + \lambda}{[\lambda - \lambda_1(r)][\lambda - \lambda_2(r)]} \right\}.$$

Valutando l'integrale rispetto ad r come residuo nel polo $r = s+2$ si ha infine:

$$(12) \quad I_n = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \frac{E_0^2}{E^3} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} d\lambda \exp[\lambda t] \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{H_1(s)}{\lambda_1'(s)} \times \\ \times \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left\{ \frac{\sigma_0 + \lambda}{[\lambda - \lambda_1(s+2)][\lambda - \lambda_2(s+2)]} \right\}.$$

Quest'ultimo integrale può ora essere valutato col metodo del punto di sella. Posto

$$(13) \quad \exp[N_n(s)] = \frac{H_1(s)}{\lambda_1'(s)} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{\sigma_0 + \lambda}{[\lambda - \lambda_1(s+2)][\lambda - \lambda_2(s+2)]} \right\}_{\lambda=\lambda_1(s)},$$

si ottiene:

$$(14) \quad I_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \frac{E_0^2}{E^3} \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{\exp[\lambda_1(s)t]}{\sqrt{\lambda_1''(s)t + N_n''(s)}} \times \\ \times H_1(s) \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{\sigma_0 + \lambda}{[\lambda - \lambda_1(s+2)][\lambda - \lambda_2(s+2)]} \right\}_{\lambda=\lambda_1(s)}$$

in cui s è determinato dalla

$$(15) \quad \log \frac{E_0}{E} + \lambda'_1(s)t + N'_n(s) = 0.$$

Per ottenere le quantità che interessano basta ora dividere I_n per $\pi(E_0, E, t)$ e il risultato si può scrivere:

$$(16) \quad \langle \theta^2 \rangle_t = \delta_0 \frac{E_0^2}{E^2}, \quad \langle \theta r \rangle_t = \delta_1 \frac{E_0^2}{E^2}, \quad \langle r^2 \rangle_t = \delta_2 \frac{E_0^2}{E^2},$$

in cui è:

$$(17) \quad \delta_n = (-1)^n \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{\sigma_0 + \lambda}{[\lambda - \lambda_1(s+2)][\lambda - \lambda_2(s+2)]} \right\}_{\lambda=\lambda_1(s)} \cdot \varphi_n(s, \bar{s}),$$

con

$$(18) \quad \varphi_n(s, \bar{s}) = \frac{H_1(\bar{s})}{H_1(s)} \left(\frac{E_0}{E} \right)^{s-\bar{s}} \frac{\sqrt{\lambda'_1(\bar{s})t}}{\sqrt{\lambda''_1(s)t + N''_n(s)}} \exp [(\lambda_1(s) - \lambda_1(\bar{s}))t];$$

\bar{s} è il parametro mediante cui si esprime $\pi(E_0, E, t)$, legato all'energia ed alla profondità dalla relazione

$$(19) \quad \log \frac{E_0}{E} + \lambda'_1(\bar{s})t + \frac{d}{d\bar{s}} \lg H_1(\bar{s}) = 0.$$

Per esprimere in modo semplice la derivata che compare in (17), conviene scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_0 + \lambda}{[\lambda - \lambda_1(s+2)][\lambda - \lambda_2(s+2)]} &= \frac{1}{\lambda - \lambda_1(s+2)} \frac{\sigma_0 + \lambda_1(s+2)}{\lambda_1(s+2) - \lambda_2(s+2)} \\ &- \frac{1}{\lambda - \lambda_2(s+2)} \frac{\sigma_0 + \lambda_2(s+2)}{\lambda_1(s+2) - \lambda_2(s+2)} = \frac{H_1(s+2)}{\lambda - \lambda_1(s+2)} + \frac{H_2(s+2)}{\lambda - \lambda_2(s+2)}, \end{aligned}$$

dove $H_1(s)$ e $H_2(s)$ sono quantità già introdotte e tabulate in ROSSI e GREISEN. Si ha così:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{\sigma_0 + \lambda}{[\lambda - \lambda_1(s+2)][\lambda - \lambda_2(s+2)]} &= \\ &= (-1)^n n! \left\{ \frac{H_1(s+2)}{[\lambda - \lambda_1(s+2)]^{n+1}} + \frac{H_2(s+2)}{[\lambda - \lambda_2(s+2)]^{n+1}} \right\}. \end{aligned}$$

Dalla (17) si ricava allora

$$(20) \quad \delta_n = n! \left\{ \frac{H_1(s+2)}{[\lambda_1(s) - \lambda_1(s+2)]^{n+1}} + \frac{H_2(s+2)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s+2)]^{n+1}} \right\} \varphi_n(s, \bar{s}).$$

Introducendo l'espressione di δ_n così calcolata nelle (16) e tenendo conto della (19) si ottiene una rappresentazione parametrica dello sparpagliamento in funzione della profondità, per gli elettroni della energia E considerata.

Si può osservare che le quantità s e \bar{s} sono poco diverse: $s - \bar{s} \cong 0,1$.

Se si trascura questa differenza e si pone $s = \bar{s}$, si ha $\varphi_n(s, \bar{s}) = 1$ e quindi le (20) esplicitate danno:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_0 &= \frac{H_1(s+2)}{\lambda_1(s) - \lambda_1(s+2)} + \frac{H_2(s+2)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s+2)}, \\ \delta_1 &= \frac{H_1(s+2)}{[\lambda_1(s) - \lambda_1(s+2)]^2} + \frac{H_2(s+2)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s+2)]^2}, \\ \delta_2 &= 2 \frac{H_1(s+2)}{[\lambda_1(s) - \lambda_1(s+2)]^3} + 2 \frac{H_2(s+2)}{[\lambda_1(s) - \lambda_2(s+2)]^3} \end{aligned} \right.$$

ed è sufficiente ricavare s dalla

$$(19') \quad \log \frac{E_0}{E} + \lambda'_1(s)t = 0$$

in quanto $H_1(s)$ è una funzione lentamente variabile.

3. - Valutazioni numeriche e conclusioni.

Nel massimo dello sciame si ha $s = 1$ e poichè $\lambda_1(1) = 0$, si ottiene:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_0 &= \frac{H_1(3)}{-\lambda_1(3)} + \frac{H_2(3)}{-\lambda_2(3)} = \frac{\sigma_0}{\lambda_1(3)\lambda_2(3)} = 0,570, \\ \delta_1 &= \frac{H_1(3)}{[\lambda_1(3)]^2} + \frac{H_2(3)}{[\lambda_2(3)]^2} = 0,394, \\ \delta_2 &= 2 \frac{H_1(3)}{[-\lambda_1(3)]^3} + 2 \frac{H_2(3)}{[-\lambda_2(3)]^3} = 0,725, \end{aligned} \right.$$

valori che risultano in sufficiente accordo con quelli calcolati da MOLIERE appunto per il *massimo*:

$$\delta_0 = 0,6, \quad \delta_1 = 0,437, \quad \delta_2 = 0,835.$$

I valori mediati su tutte le profondità, calcolati da JANOSSY col metodo delle tracce elettroniche ⁽⁵⁾ sono:

$$\bar{\delta}_0 = 0,570, \quad \bar{\delta}_2 = 0,724,$$

concordanti con quelli calcolati da ROBERT e NORDHEIM.

Confrontando le (22) con le espressioni date da JANOSSY ⁽⁵⁾ per i valori medi si vede che coincidono, cioè che:

$$\bar{\delta}_n = (\delta_n)_{t=t_{max}};$$

i valori medi coincidono perciò con i valori alla profondità del massimo.

Nella tabella I sono dati i valori di δ_n calcolati con le (21); nella fig. 1 i diagrammi relativi.

TABELLA I.

s	δ_0	δ_1	δ_2
0,1	0,188	0,036	0,014
0,2	0,260	0,069	0,038
0,3	0,317	0,104	0,071
0,4	0,366	0,140	0,115
0,5	0,408	0,178	0,171
0,6	0,447	0,217	0,232
0,7	0,482	0,258	0,323
0,8	0,514	0,301	0,428
0,9	0,544	0,347	0,554
1,0	0,570	0,394	0,725
1,1	0,598	0,453	0,969
1,2	0,624	0,519	1,29
1,3	0,647	0,590	1,72
1,4	0,668	0,669	2,27
1,5	0,686	0,754	2,99
1,6	0,702	0,846	3,90
1,7	0,715	0,944	5,05
1,8	0,725	1,045	6,42
1,9	0,730	1,139	7,99
2,0	0,732	1,229	9,75

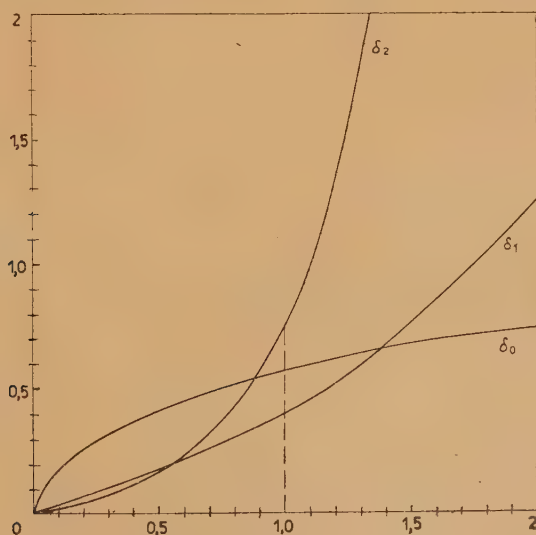


Fig. 1. — Rappresentaz. parametrica dello sparpagliamento in funzione della profondità. Ascisse: s , parametro usuale della teoria degli sciame, legato alla profondità dalla

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \log \frac{E_0}{E}.$$

Ordinate: $\delta_0 = \langle \theta^2 \rangle E^2/E_s^2$; $\delta_1 = \langle \theta r \rangle E^2/E_s^2$; $\delta_2 = \langle r^2 \rangle E^2/E_s^2$.

Dalle formule, come dall'esame del diagramma, risulta che lo sparpagliamento è funzione piuttosto sensibile della profondità e anzi che $\langle \theta r \rangle_t$ e $\langle r^2 \rangle_t$ tendono ad infinito per $t \rightarrow \infty$ in modo piuttosto rapido. Tale rapidità è però essenzialmente dovuta al crescere del braccio di leva $(t - t')^n$, più che al contributo della diffusione coulombiana vera e propria, dalla quale invece dipende il più lento crescere di $\langle \theta^2 \rangle_t$.

Il crescere indefinito dello sparpagliamento con la profondità non significa d'altra parte che uno sciame si allarghi indefinitamente. In effetti, tenendo presente l'andamento contemporaneo dello spettro differenziale e integrale elettronico, si vede che ad una certa profondità lo sciame, come tale, è praticamente esaurito. Lo sparpagliamento continua ad aumentare, ma diminuisce rapidamente la probabilità di trovare qualche particella residua dello sciame con quello sparpagliamento.

Per un confronto con l'esperienza, oltre lo sparpagliamento degli elettroni di una data energia, interessa conoscere quello medio degli elettroni di energia maggiore di un determinato valore, che dipende dal particolare dispositivo strumentale. Ciò nonostante, la dipendenza dalla profondità dello sparpagliamento, ora messa in evidenza, indica che occorre qualche cautela nel ritenere senz'altro valide a tutte le profondità le funzioni di distribuzione e di struttura valutate da MOLIERE per il massimo dello sciame. Le discrepanze fra tali funzioni di distribuzione e recenti risultati sperimentali possono essere in parte dovute ad un effetto di questo tipo. Una maggiore compressione delle particelle sull'asse dello sciame o un loro maggiore sparpagliamento potrebbe essere dovuto alla diversa età degli sciami presi in considerazione.

SUMMARY

The paper values analitically the angular mean square deviation $\langle \theta^2 \rangle$, the lateral mean square deviation $\langle r^2 \rangle$ and the coupling $\langle \theta r \rangle$ between them, of the electrons of an air shower (in «A» approximation). The results can be expressed in a compact form with

$$\langle \theta^{2-n_p n} \rangle = n! \{ H_1(s+2)/[\lambda_1(s) - \lambda_1(s+2)]^{n+1} + H_2(s+2)/[\lambda_1(s) - \lambda_2(s+2)]^{n+1} \} E_i^2/E^2$$

where $n = 0, 1, 2$. The discrepancy between the results of a preceding paper and those of other Authors is explained. Calculation indicates that (for electrons of a given energy) spread actually increases with depth.

On the measurement of scattering in the photographic plate.

Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT

Centre de Physique Nucléaire, Université Libre de Bruxelles

(ricevuto il 12 Aprile 1950)

Summary (*Editor's care*). — In this paper are described the methods actually employed at the Nuclear Physics Center of Brussel's Free University in order to obtain information on mass, charge and velocity of the very energetic particles, through the measurement of their multiple scattering. The paper discusses also particularly the eventual causes of error which limit the precision of the reported methods.

1. — Introduction.

Limited to slow and heavy particles two years ago, the domain of utilisation of the photographic method is shifting towards higher energies. The increase in sensitivity brought by the Ilford G5 and Kodak NT4 emulsions, which made possible the detection of electrons and minimum ionisation tracks, has opened a new field of research, but also of new requirements. Techniques of processing and measurement must be perfected.

The very energetic particles which can now be recorded have ranges so great that even in the thick emulsions now used their end cannot be seen. In fact their energy can often be regarded as constant during the traversal of the plate. Information on their mass, charge and velocity can still be obtained by various methods ⁽¹⁾ amongst which the measurement of multiple scattering is one of the most effective.

⁽¹⁾ G. P. S. OCCHIALINI: *Como Congress Report in Nuovo Cimento*.

A need has been felt for improvement in the techniques first developed ⁽²⁾ ⁽³⁾ for the measurement of scattering in the photographic plate. The use of the projection microscope has been perfected by DAVIES, LOCKE and MUIRHEAD ⁽⁴⁾ but in itself the method has become obsolete during the last year.

In this paper are described the methods now in use at Brussels' laboratory. Improvements are still in course, but at their present stage, these methods seem reliable and reasonably rapid. The progress has been obtained by changes in the measuring technique, and analysis of the various sources of error. It has been possible to determine energies of 10^9 eV and more, by detection of scattering of 10^{-2} degree per 100 microns and less ⁽⁵⁾.

A precision of a few percent can be obtained if a sufficient length of track is available. Several centimeters are needed for the highest energies, but can often be found in emulsions of 600 and 1200 μ thickness.

In the following, it is supposed that the energy of the particle is sufficiently high to justify the neglect of the loss of energy inside the emulsion. In n. 11, the case of a particle losing a fraction of its energy is briefly discussed.

2. - Theory.

The theoretical study of the geometry of the track of a charged particle scattered by matter, can be divided into two separate problems: the calculation of the cross section for individual collisions, and the statistical composition of the successive deflections occurring during the traversal of a finite thickness of material.

The differential angular cross section, given by the well-known RUTHERFORD formula, must be corrected for small angular deviations by taking into

⁽²⁾ S. LATTIMORE: *Nature*, **161**, 519 (1948).

⁽³⁾ Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT, G. W. KING, H. MUIRHEAD and D. M. RITSON: *Proc. Phys. Soc.*, **61**, 183 (1948).

⁽⁴⁾ J. H. DAVIES, W. O. LOCKE and H. MUIRHEAD: *Como Congress Report in Nuovo Cimento*.

⁽⁵⁾ These methods of measurement have been used for the study of couples of electrons produced by cosmic gamma rays, the results are described in the communication of Prof. OCCHIALINI to the Como Congress (September 1949). They have also been applied to the discrimination between the various particles emitted at high energy in the cosmic ray stars as reported by Prof. COSYNS at the Como Congress; these results have been recently confirmed and extended to higher energies by extensive measurements by P. H. FOWLER: *Phil. Mag.*, **41**, 169 (1950). The paper of Mr. FOWLER appeared when this paper was being completed for publication, and since the methods of measurement and analysis used by FOWLER are different to these described here it was found preferable to publish it unmodified.

account the screening of the coulombian field of the nucleus by the surrounding electrons.

By use of the THOMAS-FERMI potential, WILLIAMS⁽⁶⁾ has calculated two asymptotic values of this correction, valid for the extreme cases of $\gamma = 3Z/137\beta \gg 1$ (Classical approximation) and $\gamma \ll 1$ (BORN approximation).

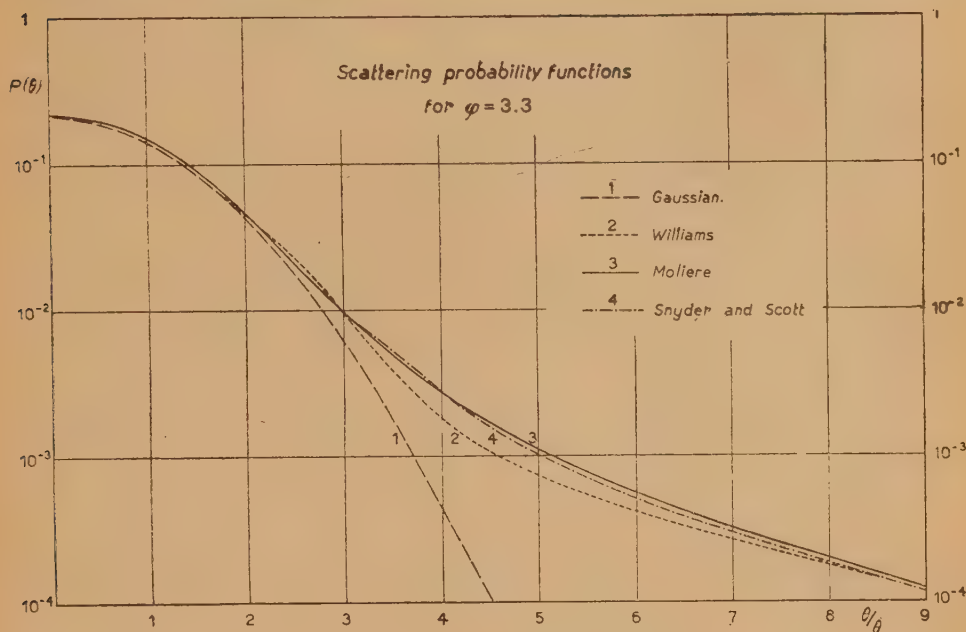


Fig. 1.

For particles scattered inside the photographic plate, which is composed of elements whose values of Z vary from 1 (H) to 53 (I), it is essential to have a solution valid for all values of γ . This has been obtained by MOLIÈRE⁽⁷⁾.

For the greatest angular deviations, corresponding to the closest approach to the nucleus, the RUTHERFORD formula must also be corrected to take into account the finite size of the nucleus, and the nuclear scattering.

The nuclear scattering is usually assumed to be smaller than the coulombian scattering⁽⁶⁾ ⁽⁷⁾ ⁽⁸⁾. This has not yet been tested experimentally in the photographic plate in the domain of energies with which we are here concerned.

The statistical study of the successive collisions leads to a description of

⁽⁶⁾ E. J. WILLIAMS: *Proc. Roy. Soc.*, **169**, 531 (1939); *Phil. Mag.*, **40**, 1250 (1949).

⁽⁷⁾ G. MOLIÈRE: *Zeits. Naturforschung*, **2a**, 133 (1947); **3a**, 78 (1948).

⁽⁸⁾ B. ROSSI and K. I. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 240 (1941).

the trajectory by a non-gaussian probability distribution of deviations from a straight line, in coordinates and direction ⁽⁶⁾ ⁽⁷⁾ ⁽⁸⁾ ⁽⁹⁾ ⁽¹⁰⁾.

The probability function can be approximated by a gaussian distribution ⁽⁸⁾ or, more exactly, by a gaussian distribution plus a « tail » taking into account the relatively high frequency of occurrence of large angular deviations ⁽⁶⁾. Better approximations of the exact probability functions have been calculated by GOUDSMIT and SAUNDERSON ⁽¹⁰⁾, MOLIÈRE ⁽⁷⁾ and SNYDER and SCOTT ⁽⁹⁾.

It is much easier experimentally to measure scattering on the projection of the track on the plane of the emulsion, rather than in three dimensions, as in cloud chamber work. The probability distributions for the projection of the track has also been given by the authors quoted. Some of these functions have been calculated numerically in a special case by M. DÔME and Mlle BOLETTE in this laboratory; results are shown by fig. 1.

The distribution is characterized by one parameter, the mean angle of scattering θ between two successive tangents to the projection of the track at a distance t ; i.e. the arithmetic mean of the absolute values of the angles between successive tangents.

Values of θ against energy and cell length have been calculated in the photographic plate, using MOLIÈRE's value of the cross section valid for all values of γ , and WILLIAMS probability function, as expressed by

$$(1) \quad \theta = \frac{2ze^2 \sqrt{t} \sqrt{\sum_i N_i Z_i^2}}{M\beta^2 c^2 \xi} \varphi,$$

$$(2) \quad \varphi = 1.45 + 0.8 \left[\sum_i \frac{\sqrt{N_i Z_i^2}}{\sqrt{\sum_i N_i Z_i^2}} \log_e 0.2 \pi t Z_i^{-8/3} (\sum_i N_i Z_i^2) \left(\frac{\hbar}{me^2} \right)^2 \frac{1}{(0.3/\gamma_i^2) + 1} \right]^{1/2},$$

where M , z and $v = \beta c$ are the rest mass, charge and velocity of the scattered particle, Z_i and N_i are the charge and number per unit volume of the scattering nuclei, t is the distance between successive tangents, m and e are the mass and charge of the electron, \hbar is PLANCK's constant divided by 2π , c is the velocity of light, β , ξ and γ are defined by

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \xi = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \gamma_i = \frac{zZ_i}{137\beta}.$$

Calculated with the information on the composition of the plates given by the makers, formula (1) becomes

$$(3) \quad \theta = \frac{0.502 \cdot 2(1 + \xi)}{Mc^2 \xi (2 + \xi)} \sqrt{t} \varphi,$$

⁽⁹⁾ L. W. SNYDER and W. T. SCOTT: *Phys. Rev.*, **76**, 220 (1949).

⁽¹⁰⁾ S. A. GOUDSMIT and J. L. SAUNDERSON: *Phys. Rev.*, **57**, 24, 552 (1940).

with t in microns, θ in degrees, and with $\zeta = E/Mc^2$ where E is the kinetic energy of the scattered particle.

The values of φ for particles of unit charge, given by fig. 2, as a function of E/Mc^2 and for various cell-lengths, have been calculated by MM. JANSSENS and LAMBERT, using MOLIERE's probability function, which is probably more accurate than formula (2). (Agreement between them is, however, better than 1 %). As a function of E/Mc^2 , φ is independent of the mass of the scattered particle.

The fig. 3 gives the mean angle of scattering, against energy, for particles of charge 1, calculated for $t = 100 \mu$.

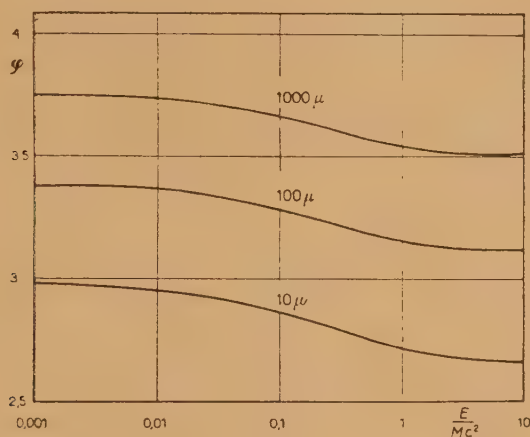


Fig. 2.

By multiplying both sides of formula (1) by Mc^2 , it is seen that for particles of equal charge, $Mc^2 \cdot \theta$ is a function only of the velocity of the particle, and not of its mass

$$(4) \quad Mc^2 \theta = F(v).$$

This property will be used in n. 12.

For $E \ll Mc^2$ formula (1) can be written

$$(5) \quad \theta = C \frac{\sqrt{t}}{E},$$

where $C = 0.502 \varphi$ is a slowly varying function of E and t , and can be regarded as constant in some applications of the method, as in n. 11.

3. - Method of measurement.

In most classical studies of the scattering of particles by matter, the trajectory is observed before and after the traversal of the scatterer. A statistic is usually obtained by analysis of the final deviation of a large number of like particles.

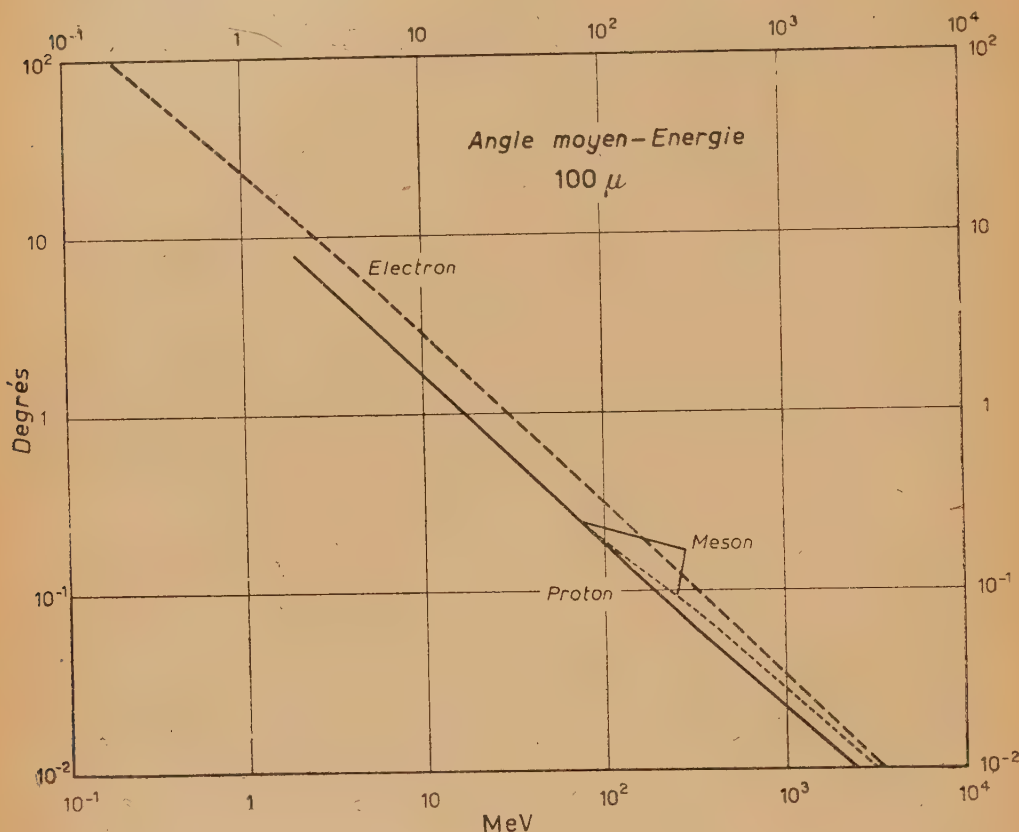


Fig. 3.

We are here concerned with a different problem, where the statistic must be made on the successive scattering of one single particle of which the track can be followed inside the scatterer. An appropriate method of measurement must be designed, to get the maximum information on the shape of the trajectory of the particle, from the relative position of the developed silver grains.

The choice of a method of measurement will depend somewhat on the precision of the measuring instrument available. The deepest analysis would

probably consist in determining the position of all the grains, but it is easily seen that the precision of the measuring instrument needed would be very great (n. 4). An appropriate statistical analysis would then be applied, consisting of some sort of averaging. A geometrical averaging is made if the track of the particle is drawn through the grains, it is then again possible to measure coordinates at regular intervals (sagitta method) or directions of successive portions of the track (angular method).

With the help of Prof. COSYNS, a special protractor has been designed with a moving arm fixed to the eyepiece of the microscope, and which can be conveniently adjusted by use of a tangential screw. The moving arm bears either a good vernier, or a reading microscope with graduated reticule, so that a fraction of a minute of angle can be easily read. A precision measurement of angle is only possible if the parallelism of the displacements of the stage of the microscope has been verified. The movement of the microscope we use has been found to be parallel within $2'$ for 3 and 7 cm displacement respectively in the y and x directions, by means described below (n. 6).

With this instrument, it has been possible to use the angular method as had been done previously on drawings of the track obtained with a projection microscope⁽³⁾. The increase of precision of determination of angles has made possible the measurement of much smaller scatterings than before, and consequently the extension of the method to a domain of much higher energies.

The eyepiece fixed on the moving arm of the protractor is fitted with a straight line reticule, and a mask limiting the field to what we shall call the « half-cell length » $t/2$. The choice of this length will be discussed later (n. 8).

It is not possible to adjust this straight-line to an exact tangent to the track, since the developed grains will not necessarily lie symmetrically around the track, but sometimes tangentially to it: the exact position of the trajectory is not known. Nor is it possible to determine with precision the direction of successive chords. The best straight line is passed through the track in the field, and the direction of this line is determined. The smoothing of the scatterings thus introduced will be studied in n. 4.

The measurement itself consists in moving the track of the particle in the field, to adjust it on the straight line of the reticule, by moving the stage of the microscope and the screw of the protractor, until the grains inside the half-cell are symmetrically distributed along the reticule line.

4. — Noise-level.

Apart from the smoothing of the scattering calculated below, the approximation to a straight line introduces various errors due 1) to the asymmetry in the distribution of the grains, 2) to the ability of the observer to adjust

the reticule on the image of the track and 3) to the imperfection of the measuring instrument. The apparent scattering arising from these various factors is usually called noise-level or spurious scattering.

The evaluation of noise level is briefly discussed in the following. A more detailed analysis will appear in a work in collaboration with Manchester University.

1) The asymetry in the distribution of the grains along the track produces a spurious scattering with mean angle $\bar{\varepsilon}_1$, the value of $\bar{\varepsilon}_1$ is easily calculated as a function of the mean distance r of the center of the grains from the track, the grain density d , and the half-cell length $t/2$. It is found to be proportional to $(t/2)^{-3/2}$, to $d^{-1/2}$ and to r .

The half-cell can be increased by enlarging the mask of the eyepiece or by using a lower power eyepiece or objective ⁽¹¹⁾. With the reticules used in our laboratory, it has not been advisable to decrease the magnification lower than the use of a $\times 45$ immersion objective with a $\times 6$ eyepiece (field diameter 380μ) because the apparent diameter of the grains would become smaller than the apparent width of the reticule line.

2) The difficulty of adjustment of the reticule to the best fit of the image of the track gives rise to a spurious scattering $\bar{\varepsilon}_2$. It is partly subjective and depends on the training of the observer, it is also influenced by the optical conditions, the quality of the reticule, the precision of the measuring instrument.

To determine the value of $\bar{\varepsilon}_2$, the method we prefer consists in measuring several times the direction of each half cell, say $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ by deliberately displacing the track away from the eyepiece line, and disadjusting the projector for each measurement. The particle is assumed to have the direction of the arithmetic mean of the successive measurement (this direction is still affected by the error $\bar{\varepsilon}_1$):

$$\bar{\beta} = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n}{n},$$

the mean angle ε_2 in the half-cell is calculated from the mean deviation (or from the quadratic deviations) from this value

$$\varepsilon_2 = \frac{\sum (\bar{\beta} - \beta_i)}{n \sqrt{n}}.$$

If N half-cells are measured on the track, the mean angle of noise-level $\bar{\varepsilon}_2$ on the track is taken as

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{\sum \varepsilon_2}{N}.$$

⁽¹¹⁾ Prof. COSYNS has shown that the field diaphragm of a conventional $\times 15$ eyepiece can be opened of about 10 % without introducing objectionable distortion.

The value of $\bar{\epsilon}_2$ depends on the grain size and grain density, on the angle of dip, etc., but it can be reduced indefinitely by taking a sufficient number n of measurements on each half-cell.

3) The third component $\bar{\epsilon}_3$ of the noise-level is due to the imperfections in the movement of the stage of the microscope. Modern stages are built with great mechanical accuracy, and these imperfections become appreciable only in the measurement of the most energetic tracks (n. 6).

The total noise level is the quadratic sum of the components

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\bar{\epsilon}_1^2 + \bar{\epsilon}_2^2 + \bar{\epsilon}_3^2}.$$

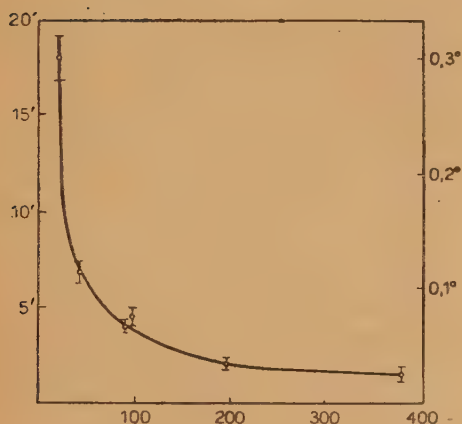


Fig. 4. — Spurious scattering against 1/2 cell length minimum grain density track.

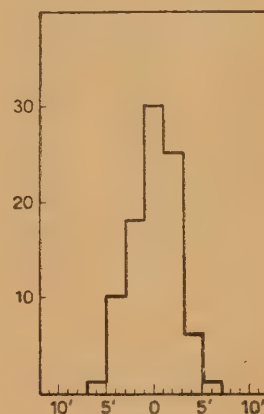


Fig. 5. — Distribution of spurious scattering, $t/2 = 200 \mu$.

Fig. 4 shows the noise-level against half-cell length measured on a track of minimum ionisation of which the true scattering is known to be negligible (less than $7 \cdot 10^{-3}$ degree per 100μ).

For short cell-lengths, the first term is predominant and it was sufficient to measure say three or four times the direction of each half-cell to make $\bar{\epsilon}_2$ small compared to $\bar{\epsilon}_1$.

For half cell-lengths of 200 to 300μ , $\bar{\epsilon}_1$ is of the order of 0.2 to 0.6 minutes. To reduce $\bar{\epsilon}_2$ to this value, each half-cell was measured six to ten times. With the microscope stages at our disposal, $\bar{\epsilon}_3$ is of the order of 1.5 to 2 minutes and seems to fix the present lower limit for the noise-level.

The fig. 5 shows the distribution of spurious scatterings for one of the longest half-cells.

It is interesting to observe that the noise-level on a 380μ half-cell is only 1.5 min. The chord of this angle, on a circle of radius equal the diameter of the field, is 0.16μ . This indicates the degree of precision of the measuring

instrument needed for sagitta measurements, to compete with the angular method. It also shows the mechanical difficulty in building an even better stage, if a further reduction of the noise-level is to be obtained.

5. - Distortion.

The gelatin of the photographic plate, like the gas of the cloud chamber, is liable to give distorted images of the tracks, if special precautions are not taken during the recording, and between exposure and measurement.

During the exposure it is certainly better to protect the plates against violent changes of humidity in the surrounding atmosphere, either by use of air-tight containers, or by protection of the surface of the emulsion.

Special care is needed during all stages of processing. The developing, fixing and washing must be made with the plates strictly horizontal. Any rapid displacement of liquid near the surface of the emulsion must be carefully avoided, as well as violent changes in temperature, and in pH ⁽¹²⁾. The drying of the plates also requires special precautions.

However strictly these conditions have been fulfilled, a check must be made on the degree of distortion of the developed plate. Preliminary measurements indicate that the distortion produces continuous curvature of the track, i.e. unlike the random scatterings, successive angular deviations all in the same direction. The presence of a *C*-shaped track is usually the danger-signal for distortion ⁽¹³⁾.

If measurements have been made on a sufficient length of path the mean curvature can be determined, and subtracted from the successive angular deviations before calculating the mean angle of scattering.

Prof. COSYNS and VANDERHAEGHE ⁽¹⁴⁾ have developed a method by which the curvature on a track of given azimuth and dip angle can be calculated by measurements of the distortion of heavily dipping tracks. Where the distortion is small, this allows us to correct for the curvature introduced by distortion, and for a given region of the plates gives us a safety limit.

It might seem an impossible achievement to avoid distortions in a thick

⁽¹²⁾ C. DILWORTH, G. P. S. OCCHIALINI and L. VERMAESEN: *Bulletin du Centre de Physique Nucléaire de Bruxelles*, n. 13; *Bristol conference on photography*, April 1950.

⁽¹³⁾ Studying the measurement of scattering by the determination of coordinates of successive points of the track (sagitta method) SCOTT ⁽¹⁵⁾ has shown that *C*-shaped tracks are more probable than *S*-shaped tracks. Calculations by Mr. DOME in our laboratory show that this phenomenon is essentially linked with the sagitta method of measurement and does not exist with the angular method.

⁽¹⁴⁾ M. D. E. COSYNS and G. VANDERHAEGE: *Bull. du Centre de Phys. Nucléaire de Bruxelles*, n. 15; *Bristol conference on photography*, April 1950.

layer of a substance as little rigid as gelatine, in spite of brutal treatments like the dissolution of a large quantity of silver bromide throughout the layer during the fixing stage. The fact that the absence of angular deviation within $2'$ of angle for several cm of tracks has been observed in many plates of 400 and 600 μ thickness, should encourage the use of even thicker emulsions.

6. — Geometrical error.

The approximation of successive portions of the track to straight lines gives rise to a «smoothing» of the scatterings, as compared with an actual

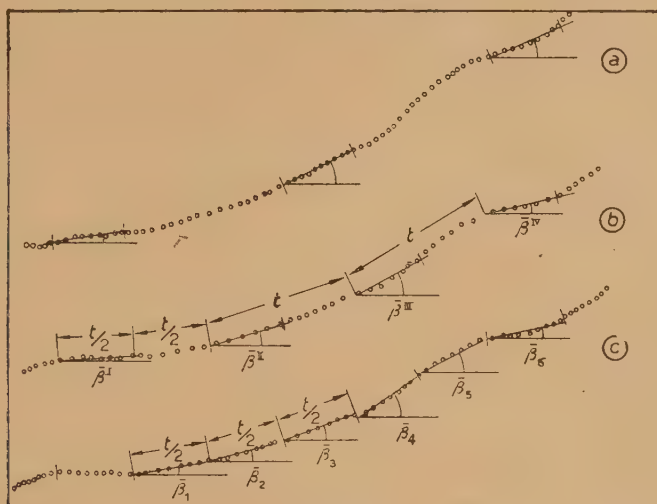


Fig. 6.

measurement of tangents. The error thus introduced can be reduced by taking the angles between sufficiently distant portions of the track (fig. 6 a), this will tend to increase the statistical error. It has been found convenient in most cases to take the angles between half-cells at a half-cell distance (fig. 6 b), i.e. to calculate the angles

$$\alpha' = \beta'' - \beta', \quad \alpha'' = \beta''' - \beta'', \quad \text{etc.}$$

The resultant smoothing can be calculated using the coordinates-direction probability function given by FERMI⁽⁸⁾, and discussed by SCOTT⁽¹⁵⁾.

The mean angle between successive tangents is shown to be greater than the angle between successive chords. It is easily seen that these values are

⁽¹⁵⁾ W. T. SCOTT: *Phys. Rev.*, **76**, 212 (1949).

upper and lower limits for angles between successive mean straight lines drawn through the grains. Detailed calculations for half-cells at a half-cell distance are given in ref. 3, appendix 1. The angular deviations are found to be reduced by a factor of 0.96 ± 0.02 as compared to tangents at a cell length distance.

By the same methods, it is possible to calculate the mean angle between the chord and the tangent of the same half-cell. A fraction of this angle, of the order of $1/2$ to $1/4$, gives the lower limit to the noise-level, that which would be found by our method of measurement, even if the other sources of spurious scattering were completely eliminated. This lower limit is found to be $1/5$ to $1/10$ of the mean angle between half-cells at a half-cell distance.

For these reasons, the 0.02 indetermination on the smoothing coefficient 0.96, will be already taken into account to some extent by measuring the noise-level. It seems safer, however, to consider the two errors as independent, with the result that the total error, as calculated below, may be slightly over-estimated.

When the mean angle of scattering to be measured becomes of the order of the noise-level for the longest half-cells available ($2'$ in 380μ) it becomes necessary to use « half-cells » separated by a longer distance. The smoothing is then negligible and the effective cell-length is increased; the mean angle of scattering increases as the square root of the cell length, while the noise level remains constant. Using this method, with « half-cells », of 380μ at 3500μ distance, it has been possible to find as upper limit for the mean angle of scattering of the central particle (7 cm long) in the photograph n. 3 described in ref. 1 (anomalous giraffe), the value of $7 \cdot 10^{-3}$ degree/ 100μ . This corresponds to a minimum energy of $4 \cdot 10^9$ eV. Another example is the linking particle in events (5) and (6) of the same paper: $\theta \leq 2 \cdot 10^{-2}$ degree per 100μ , $E \geq 10^9$ eV.

These particles are the straightest lines we have found to check the parallelism of the movement of the stage of the microscope, with the precision indicated in n. 3, by fixing the plate in various positions and orientations on the stage.

7. — Statistic.

The method used generally to fit a Gaussian normal curve to experimental data, with minimum statistical error, consists in calculating the root mean square of the measurements, which is the best evaluation of the standard deviation of the distribution ⁽¹⁶⁾.

⁽¹⁶⁾ E. WHITTAKER and G. ROBINSON: *The Calculus of Observations* (London and Glasgow, 1948), p. 201.

The probability distribution of the scattering angles is not gaussian, the relatively high frequency of rather large scatterings introduces important fluctuations in the sum of the squares.

An attempt has been made to find a better statistical method ⁽³⁾ to fit the results into the non-gaussian distribution curve, by multiplying each measurement by a suitable statistical weighting factor before taking a mean. A satisfactory result is obtained by giving a weight 1 to all measurements below a «cut off» angle, a weight 0 to all angles greater than the cut off, and by taking the arithmetic mean.

We use a cut off at 4 times the arithmetic mean. It can be calculated that 0,7 % of the angles will fall above the cut-off, the mean will be diminished by 9 %, and the probable statistical error for N' angles falling below the cut off will be $0.54/\sqrt{N'}$ to be compared with the values $0.51/\sqrt{N'}$ and $0.48/\sqrt{N'}$ obtained respectively for the arithmetic mean and the root mean square on a normal Gaussian distribution ⁽¹⁶⁾. The cut-off angle is not known a priori when the mean is calculated, but is rapidly found by trial and error ⁽¹⁷⁾.

It is possible to increase the statistical accuracy by using over-lapping cells, i.e., by calculating (fig. 6 c):

$$\alpha_1 = \beta_3 - \beta_1$$

$$\alpha_2 = \beta_4 - \beta_2$$

$$\alpha_3 = \dots,$$

and taking the arithmetic mean of all N angles α_i below the cut-off

$$\bar{\alpha}_{\text{exp}} = \frac{\sum \alpha_i}{N}.$$

These measurements are not statistically independent, but it can be shown ⁽³⁾ that their correlation is taken into account by regarding 2/3 of them as independent. With N values of ($N + 2$ half-cells, or more if the cut-off rule has been applied), the statistical error is then

$$\frac{0,66}{\sqrt{N}}.$$

⁽¹⁷⁾ This value of the error is calculated with the assumption that the probability distribution of the arithmetic mean is gaussian. An approximation of the error not depending on a special assumption could be calculated, for instance, by use of the fourth order moment.

8. — Total error.

The apparent scattering due to noise-level, with mean angle $\bar{\varepsilon}$, and the scattering itself with mean angle $\bar{\alpha}_{sc}$ are two independent probability phenomenon, so that the resultant measured scattering $\bar{\alpha}_{exp}$ is equal to

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_{exp} &= \sqrt{\bar{\alpha}_{sc}^2 + \bar{\varepsilon}^2}, \\ \bar{\alpha}_{sc} &= \bar{\alpha}_{exp} \left(1 - \frac{\bar{\varepsilon}^2}{2\bar{\alpha}_{exp}^2} \right).\end{aligned}$$

The measurements of noise-level show that the distribution of spurious scattering can be supposed gaussian; the mean noise-level error is $\bar{\varepsilon}^2/2\bar{\alpha}_{exp}^2$, so that the probable noise-level error is $0.85 \bar{\varepsilon}^2/2\bar{\alpha}_{exp}^2$.

It is advisable in many cases to use a sufficiently long cell to have $\bar{\alpha}_{exp} \geq 4\bar{\varepsilon}$, so as to keep the noise-level error below 3%: this rule determines roughly the cell-length to use.

To the noise-level probable error must be added the statistical probable error and the geometrical error (2 % uncertainty on smoothing). The total relative probable error is

$$0.02 + \sqrt{\left(\frac{0.66}{\sqrt{N}}\right)^2 + \left(\frac{0.85 \bar{\varepsilon}^2}{2\bar{\alpha}_{exp}^2}\right)^2},$$

provided the absence of distortion of the gelatine has been checked.

Since the total length of track available for measurement is finite, the statistical error can only be decreased by reducing the half-cell length. This increases the noise-level error. The best half-cell length is the compromise between these two factors which renders minimum the total error. It can only be chosen if a preliminary measurement or evaluation has given the approximate value of the scattering, and of the noise-level. In most cases, it is not very different from the rough value giving $\bar{\alpha}_{exp} \geq 4\bar{\varepsilon}$. We have used half-cell lengths extending from 12 μ (mesons and electrons in the region below 10 MeV) up to 380 μ for minimum ionisation particles of 500 MeV or more.

9. — Standartisation to 100 μ cell.

The graphs 2 and 7 are relative to the mean angle between successive tangents on 100 μ cells. The experimental scattering angle has been measured with half-cells of length $t/2$ (cell-length t). Taking into account the smoothing

factor 0.96 and the cut-off factor 0.91, we standardize our measurement to the mean angle between tangents on a 100 μ cell by the approximate formula

$$\theta \cong \frac{\bar{\alpha}_{sc}}{0.96 \cdot 0.91 \sqrt{t/100}} = \frac{\bar{\alpha}_{sc}}{0.87 \sqrt{t/100}}.$$

A more precise value, which takes into account the variation of φ with t , is obtained by use of formula 3 and fig. 2.

The knowledge of θ gives an order of magnitude of the energy of the particle, since θ does not depend very much on the mass of a given energy (fig. 3). If the mass is known, the energy is given by fig. 3 with the same relative error for E as for θ .

Both mass and energy can be determined, if the measurement of scattering is combined with determination of range (n. 11), ionisation (n. 12) or magnetic deflection in the air gap between a pair of plates ⁽¹⁸⁾.

10. — Single scattering.

When the mean angle of scattering is of the order of $5 \cdot 10^{-2}$ degree per 100 μ cell, or less, a slight distortion of the gelatine, or a suspected lack of parallelism of the movement of the microscope, might put some doubt on the reliability of the results obtained. They always give a lower limit of the particles, since accidental deviations of the track can only increase the apparent scattering.

An alternative method of evaluation of the energy consists in counting the number A of individual angular deviations, greater than a given limit angle Φ_0 i.e., to count the deviations falling in the region beyond the cut-off angle used in n. 7.

The number A of single scatterings greater than Φ_0 , on a length of track t , is easily calculated by the RUTHERFORD formula

$$(6) \quad A = \frac{\pi}{2\Phi_0^2} \frac{0.252}{N^2 e^4} \frac{4(1 + \zeta)^2}{\zeta^2(2 + \zeta)^2} t = \frac{\pi}{2\Phi_0^2} \left(\frac{\theta}{\varphi} \right)^2.$$

In the domain considered, the correction of the formula taking into account the influence of the screening is negligible. The nuclear scattering is probably unimportant for energies lower than 10^9 or 10^{10} eV, it is very little known for higher energies, where the formula might not be valid.

⁽¹⁸⁾ Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT and M. MERLIN: *Como Congress Report in Nuovo Cimento*.

The energy is evaluated by use of formula (6), from the observed value of A/t .

The choice of the limit angle Φ_0 is guided by two conflicting requirements. To evaluate A with good statistical accuracy, the number of angles counted should be as great as possible, and Φ_0 should be chosen small. The danger is that, with a too small value of Φ_0 , an accumulation of small angles might produce the appearance of a single scattering. It is also experimentally difficult to localize single deflections of too small amplitude.

Some trials have been made to determine the smallest single angular deviation which is consistently detectable on minimum ionisation tracks, with various magnifications and field diameters. The limit seems to be $0^\circ.5$ in a field of $200\ \mu$ diameter, with magnification about $\times 600$.

To reduce below 5 % the probability to have an accumulation of small deviations giving the appearance of a single scattering, it can be calculated that the mean angle of scattering must be 5 times less than the limiting value of $0^\circ.5$ per 200 micron, i.e. $\theta \leq 7 \cdot 10^{-2}$ degree per 100 μ .

This corresponds to energies of 500 MeV, or more. The frequency A/t of occurrence of angles greater than $\Phi_0 = 0^\circ.5$ is then

$$A/t \leq 0.09 \text{ angular deviations/cm.}$$

This frequency is too small to allow good statistics to be made, but when several centimeters of track are available, as is often the case in emulsions of 600 μ or more, a lower limit of the energy can be obtained.

11. — Scattering-range.

The measurement of scattering in the photographic emulsion was first used in combination with range, to determine the mass of cosmic ray mesons ⁽²⁾ ⁽³⁾.

The method can be summarized as follows.

The angles of scattering α_i are measured as described above for particles of constant energy, on the successive overlapping cells.

As shown by equation (5), the product of the mean angle of scattering and the energy is a known constant. The energy in each cell is not known, but can be calculated as a function of range and mass by the power-law approximation to the range-energy relation (CAMERINI and LATTES):

$$(7) \quad E = aR^n M^{1-n}, \quad a = 0.262, \quad n = 0.575.$$

From the N observed values of α_i at range R_i , the following mean is calculated

$$m = \frac{1}{N} \sum \alpha_i R_i^n.$$

The mass is then given by

$$M = \left(\frac{C \sqrt{t}}{am} \right)^{1/(1-n)}.$$

With increasing range the angle of scattering falls and it is necessary to use longer cells.

Suitable corrections must be applied to take into account the noise-level, the geometrical error, the variation of energy inside the cells, the errors introduced by use of the approximate formulae (5) and (7). These corrections are discussed and calculated in ref. (3).

Another application of formula (5) is the calculation of the mean angle of scattering for particles which do not reach the end of their range in the emulsion, but lose an appreciable fraction of their energy while traversing the plate. In most such cases, it is sufficient to calculate the mean angle of scattering at the middle of the track by a mean of the form

$$\bar{\alpha} = \sum \frac{E_i}{\bar{E}} \alpha_i,$$

E_i is the energy in the cell where α_i has been measured, and \bar{E} is the mean energy of the particle. The coefficients E_i/\bar{E} are usually not very different from unity, so that approximate values of \bar{E} and of the loss of energy per unit length are sufficient to calculate E_i . These approximate values are calculated by trial and error, from a first evaluation of $\bar{\alpha}$.

12. — Scattering-ionisation.

As has already been seen in n. 9, a measurement of scattering on a first particle traversing the emulsion gives an approximate value of its energy, even if no indication is available on its mass (fig. 3).

The combination of a measurement of scattering with a grain-counting enables us in suitable conditions, to determine both mass and energy.

The number of grains is an unknown function of the loss of energy by ionisation of the particle. This function can be studied by various methods, described in ref. (1) and (12).

Results obtained in our laboratory on mesons of length 1 to 2 cm allow the determination of the ionisation by grain counting with good accuracy above two times minimum grain density. ROSS and ZAJAC (19) have lowered this

(19) M. A. S. ROSS and B. ZAJAC: *Nature*, **164**, 311 (1949).

limit to 1.35 times minimum grain density by measurements on slow electron tracks.

The loss of energy by ionisation, conveniently measured by its ratio I/I_0 to minimum ionisation, is only a function of the velocity, and not of the mass, for particles of equal charge

$$I/I_0 = f(v).$$

Combining this equation with eq. (4), it is seen that the mean angle of scattering is a function of mass and ionisation loss of the form

$$\theta = \frac{1}{M} F(I/I_0).$$

Plotted on a semi-logarithmic graph, values of I/I_0 against θ will appear for various values of M , as identical curves shifted along the θ axis.

Such a graph is given in fig. 7. The values of I/I_0 have been calculated by MM. JANSSENS and LAMBERT, using the theory of ionisation loss in condensed media of HALPERN and HALL ⁽²⁰⁾.

Since the scattering is roughly inversely proportional to energy, the shape of the curves is similar to ionisation-energy curves turned from right to left.

The curves are graduated in energy and residual range, they can be used to find rapidly the relation between energy, track length, ionisation and scattering, and so to decide what type of measurements are required.

The present knowledge of the ionisation-grain density relation enables to use the curves with certainty in the region above 1.4 times minimum. Individual tracks of grain density above 1.4 times the minimum can be identified as electrons, mesons or protons within the experimental errors of the measurements.

In the region below 1.4 times minimum, it is not yet certain if the grain density can be taken as a measurement of ionisation. This might be proved right by measurements of scattering on a sufficiently great number of particles in this region, if they should be found to lie on the curves of fig. 7.

Acknowledgments.

The author wishes to express his gratitude to Prof. COSYNS and Prof. OCCHIALINI for constant help and encouragement during the course of this work. His sincere thanks are due to Prof. MOLIERE for the keen interest he has taken in this investigation, and for many helpful discussions. He is very grateful

⁽²⁰⁾ O. HALPERN and H. HALL: *Phys. Rev.*, **73**, 477 (1948).

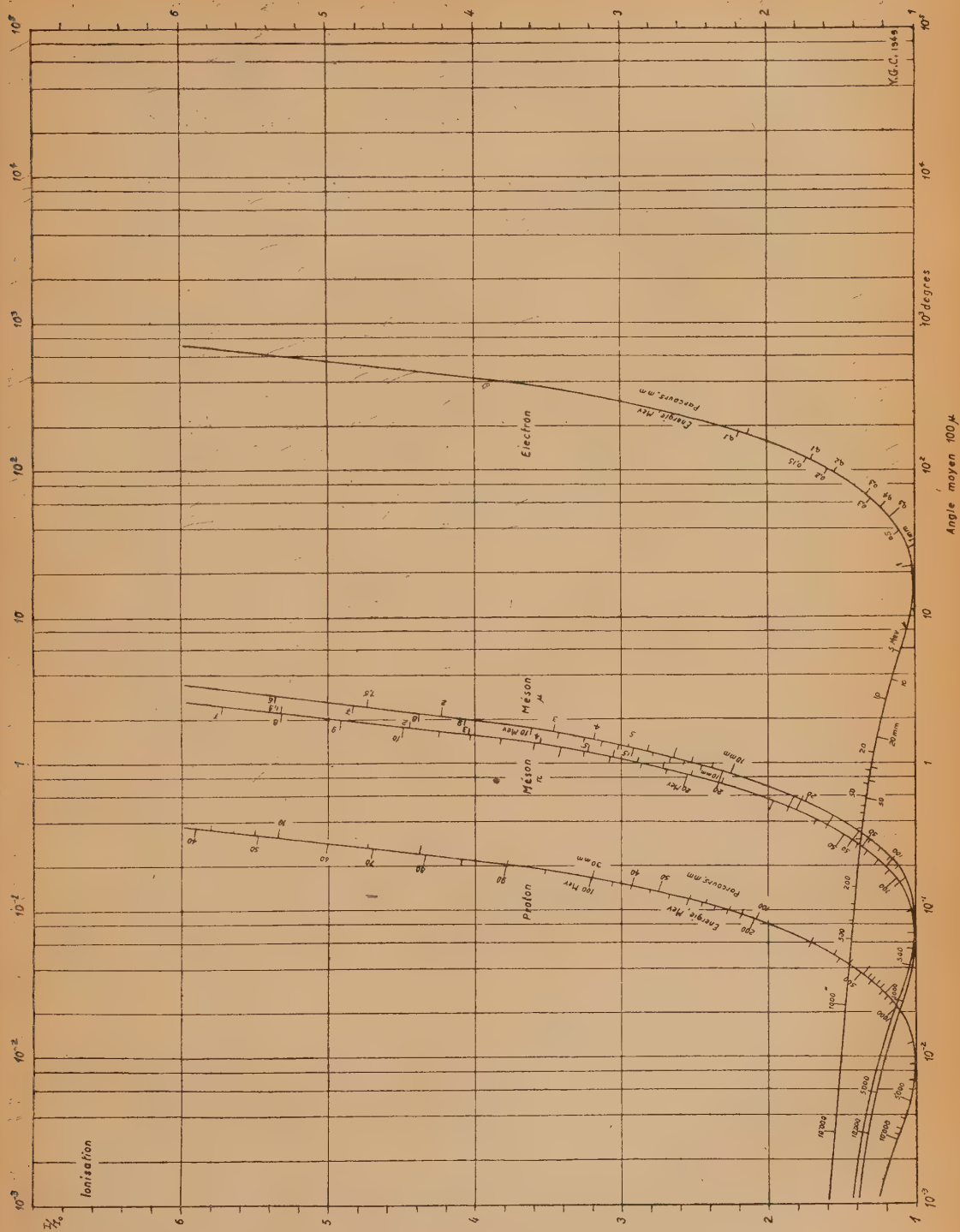


Fig. 7.

to Prof. SCHÖNBERG and also to his colleagues Miss DILWORTH, Mr. PICCIOTTO and VERMAESEN for many helpful criticisms and suggestions.

He is indebted to Mr. WALLER, of Ilford Ltd, and to Mr. BERRIMAN, of Kodak Ltd. for providing the special emulsions.

The careful processing of the plates is due to Miss DILWORTH, Prof. OCCHIALINI and Mr. VERMAESEN.

He also thanks M.lle BOLETTE, Mr. DÔME, Mr. JANSSENS and Mr. LAMBERT for great help in many calculations.

RIASSUNTO (*a cura della Redazione*).

In questo lavoro sono descritti i metodi attualmente in uso presso il Centro di Fisica nucleare dell'Università Libera di Bruxelles per ottenere informazioni circa la massa, la carica e la velocità di particelle veloci per mezzo dell'esame dello « scattering » multiplo. Sono anche particolareggiatamente discusse le eventuali cause di errore che limitano la precisione dei metodi descritti.

NOTE TECNICHE

Dispersione e aberrazione nello spettrografo di massa a campo magnetico.

L. MUSUMECI

Accademia Navale, Livorno

(ricevuto il 16 Marzo 1950)

Riassunto. — Il problema della focalizzazione di particelle cariche a mezzo di un campo magnetico è studiato con particolare riguardo alla sua applicazione negli spettrografi di massa. Sono esaminati i casi di focalizzazione simmetrica, perfetta e approssimata del 1° e 2° ordine, nelle condizioni di massima dispersione delle immagini. È calcolato il valore dell'aberrazione nei due casi e sono esaminate dettagliatamente le altre cause di aberrazione inerenti al funzionamento dello spettrografo.

Introduzione.

Come è noto, il raggio di curvatura della traiettoria piana descritta da una particella carica in un campo magnetico, diretto normalmente al piano della traiettoria stessa, è:

$$(1) \quad \rho = \frac{mv}{eH},$$

dove: m è la massa della particella, v la velocità, e la carica, H l'intensità del campo.

Considerando numerosi ioni di ugual carica, all'uscita dal campo si ha una dispersione dovuta ai diversi valori di mv , cioè uno spettro di impulsi. Se gli ioni sono anche monocinetici, di energia eV , si ha:

$$(2) \quad \frac{1}{2}mv^2 = eV,$$

e quindi:

$$(3) \quad \rho = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{2mV}{e}},$$

dove ρ risulta funzione della sola m . Si ha allora uno spettro di masse.

Le precedenti considerazioni valgono per fasci infinitamente sottili di traiettorie inizialmente parallele. Quando però è necessario ottenere correnti ioniche relativamente intense da sorgenti di piccole dimensioni, bisogna considerare traiettorie con notevoli divergenze iniziali, rispetto alla traiettoria centrale del fascio, e risolvere il problema della loro focalizzazione.

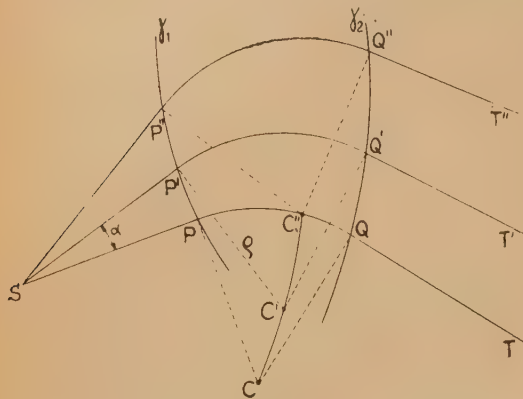


Fig. 1.

Lo studio della focalizzazione magnetica, nel caso più generale, conduce ad espressioni eccessivamente complicate e di scarsa utilità pratica nella costruzione di uno spettrografo di massa ⁽¹⁻⁶⁾. Infatti, le ipotesi ammesse nello studio teorico (principalmente: uniformità del campo e discontinuità ai contorni) rendono in pratica illusorie, oltre un certo limite, le approssimazioni che si possono prevedere con considerazioni puramente geometriche. Inoltre bisogna tener conto della difficoltà di produrre e mettere a

punto campi magnetici a contorni complicati. Conviene quindi limitarsi alla determinazione di alcuni casi particolari che rappresentino il miglior compromesso fra le soluzioni teoricamente perfette e le esigenze pratiche di semplicità costruttiva.

Focalizzazione perfetta simmetrica.

Consideriamo una sorgente puntiforme S (fig. 1) e una traiettoria uscente da S che attraversa il campo magnetico H , diretto normalmente al piano del disegno, lungo il percorso $SPQT$, essendo C il centro di curvatura della traiettoria nel campo H . Un altro raggio SP' ruoterà intorno al centro C' e seguirà il percorso $SP'Q'T'$.

Si può dimostrare che, dato un contorno di entrata arbitrario γ_1 e un

⁽¹⁾ A. O. NIER: *Rev. Scient. Inst.*, **11**, 212 (1940).

⁽²⁾ R. HERZOG: *Zeits. f. Phys.*, **89**, 786 (1934).

⁽³⁾ SMYTHE, RUMBAUGH, etc.: *Phys. Rev.*, **45**, 724 (1934).

⁽⁴⁾ G. COCCONI: *Rivista del Nuovo Cimento*, **2**, 1 (1946).

⁽⁵⁾ K. T. BAINBRIDGE: *Seventh Solvay Congress in Chemistry*, Settembre 1947.

⁽⁶⁾ A. E. SHAW e W. RALL: *Rev. Scient. Inst.*, **18**, 278 (1947).

determinato raggio di curvatura ρ (costante) è sempre possibile determinare un contorno di uscita γ_2 tale che tutti i raggi QT , $Q'T'$, ecc., si focalizzino in un punto arbitrario del semipiano posto a destra della semiretta SP ed esterno ai cerchi di centro C , C' , ecc., e raggio ρ .

Al variare di α , mentre il punto P percorre il contorno γ_1 del campo, il centro C descrive una curva CC' . La condizione affinché i raggi provenienti da S escano dal campo paralleli fra loro e diretti in una direzione inclinata di Φ rispetto a quella SP di entrata è che il profilo del contorno di uscita γ_2 sia ottenuto con una traslazione rigida della curva CC' di una quantità ρ in direzione $\Phi - 90^\circ$.

La forma della curva CC' dipende da quella di γ_1 . In particolare, possiamo determinare γ_1 in modo che CC' risulti una retta. In questo caso (fig. 2) tutte le traiettorie tagliano con angolo di 90° la retta CC' .

Se in queste condizioni stabiliamo un contorno di uscita γ_2 simmetrico di γ_1 rispetto alla CC' , si vede immediatamente che tutte le traiettorie risul-

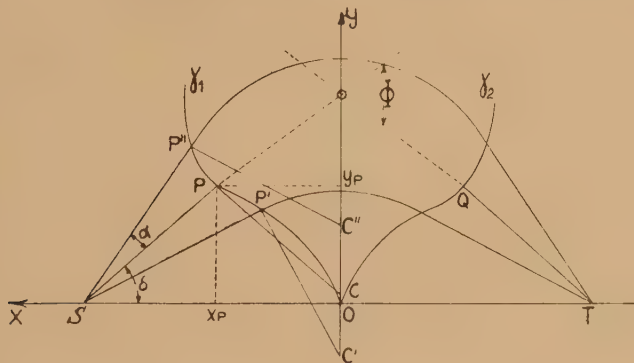


Fig. 2.

tano simmetriche rispetto a CC' e si focalizzano quindi in T , essendo: $OT = SO$. È questo il caso della focalizzazione perfetta simmetrica. L'equazione della curva γ_1 si ricava facilmente rispetto agli assi x, y , scelti come in fig. 2, dove a è l'ascissa della sorgente e ρ il raggio di curvatura dato dalla (3). Si ha:

$$(4) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{y}{a-x};$$

$$(5) \quad x = \rho \operatorname{sen} \delta.$$

Eliminando δ fra (4) e (5) si ottiene:

$$(6) \quad y = \frac{x(a-x)}{\sqrt{p^2-x^2}}.$$

Nella realizzazione pratica il contorno dato dalla (6) non risulta di facile costruzione, per cui si preferisce approssimarlo con linee più semplici. L'ap-

prossimazione più comunemente usata negli spettrografi del tipo Nier e simili⁽⁷⁻⁸⁾ consiste nel sostituire alla curva (6) la sua tangente nei punti di entrata e di uscita della traiettoria centrale del fascio. In queste condizioni solo questa traiettoria passa per il fuoco T , mentre quelle inizialmente divergenti di un angolo α subiscono in T una certa aberrazione dipendente dai termini del secondo ordine, e di ordine maggiore, dello sviluppo in serie della (6) nel punto x_P . Abbiamo quindi una focalizzazione del primo ordine. L'entità della aberrazione trasversale in T , cioè la larghezza del fascio di traiettorie nel fuoco dipende da α e cresce con essa, e dipende anche, a parità di α , a , ρ , dal valore di δ ; cioè dalla posizione di P sul contorno γ_1 .

Se al profilo del contorno dato dalla (6) sostituiamo il suo cerchio tangente in P e Q , i raggi inizialmente divergenti di α subiscono in T una aberrazione dipendente dai termini del terzo ordine e di ordine maggiore dello sviluppo in serie della (6) nel punto x_P . Abbiamo allora una focalizzazione del secondo ordine.

La condizione generale di focalizzazione del secondo ordine è riportata da H. HINTENBERGER⁽⁹⁾. L'entità dell'aberrazione relativa è stata calcolata da L. KERWIN⁽¹⁰⁻¹¹⁾ in un caso particolare di cui si fa cenno nel seguito. Nel presente studio l'entità della stessa aberrazione è calcolata in un altro caso particolare.

Sarebbe superfluo studiare approssimazioni con curve di grado superiore al secondo, in quanto che la loro realizzazione pratica non avrebbe più il vantaggio della semplicità rispetto al profilo ideale dato dalla (6). Ci limiteremo quindi all'esame di questi due casi.

La deviazione totale Φ , subita dal fascio, è sempre uguale all'arco descritto nel campo magnetico e, nel caso simmetrico considerato, è anche uguale a 2δ . Ciò significa che, prestabilito un valore di δ , fissato uno dei due parametri a , ρ , e tenuto conto della condizione $x \leq \rho$, è sempre possibile determinare un valore dell'altro parametro tale che il punto P di entrata risulti in una posizione prescelta del contorno. Si tratta quindi di determinare, fra le infinite soluzioni teoricamente possibili, quelle praticamente più vantaggiose, cioè che soddisfano nel modo migliore ai seguenti requisiti:

- a) massima dispersione delle traiettorie;
- b) minima aberrazione dell'immagine;
- c) massima intensità di corrente ionica;
- d) semplicità di costruzione e messa a punto delle espansioni polari che producono il campo;
- e) minima lunghezza delle traiettorie fra la sorgente e il collettore (che debbono svolgersi in camera a vuoto);
- f) minimi effetti del flusso magnetico disperso.

(7) A. O. NIER: *Rev. Scient. Inst.*, **18**, 398 (1947).

(8) H. BERNAS e A. O. NIER: *Rev. Scient. Inst.*, **19**, 895 (1948).

(9) H. HINTENBERGER: *Zeits. f. Naturforschung*, **3a**, 125, 669 (1948); *Rev. Scient. Inst.*, **20**, 748 (1949).

(10) L. KERWIN: *Rev. Scient. Inst.*, **20**, 36 (1949).

(11) L. KERWIN e C. GEOFFRION: *Rev. Scient. Inst.*, **20**, 381 (1949).

Dispersione delle traiettorie.

Riprendiamo l'equazione (3):

$$(3') \quad \rho = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{2mV}{e}}.$$

Differenziando rispetto ad m e dividendo tutto per ρ si ottiene:

$$(7) \quad \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{2m}.$$

Come si vede, la variazione del raggio di curvatura, a parità degli altri parametri, dipende solo dalla variazione della massa degli ioni. Poichè il rapporto $\Delta m/m$ è un dato del problema, ne risulta che la differenza $\Delta\rho$ fra i raggi di curvatura relativi a m e $m + \Delta m$ dipende dalla grandezza di ρ ed è proporzionale ad essa.

La questione assume particolare importanza quando $\Delta m/m$ è piccolo (per es. nel caso degli isotopi ^{199}Hg e ^{200}Hg si ha: $\Delta m/m = 0,005$).

In queste condizioni è necessario ricorrere a grandi valori di ρ ($\rho = 40$ cm per ottenere $\Delta\rho = 1$ mm).

La dispersione, che definiremo come distanza fra le immagini delle masse m e $m + \Delta m$ misurata in direzione normale alle traiettorie, dipende dal valore di $\Delta\rho$ dato dalla (7) e dall'angolo di deviazione che, nel nostro caso simmetrico, è uguale a 2δ . Vogliamo quindi determinare, per un dato $\Delta\rho/\rho$, il valore dell'angolo δ che produce la massima dispersione.

Riferiamoci ad un campo magnetico il cui contorno soddisfi alla (6) e consideriamo due particelle di massa m e $m - \Delta m$ uscenti da S nella direzione SP (fig. 3), e siano ρ e $\rho - \Delta\rho$, C , C' , i rispettivi raggi e centri di curvatura delle traiettorie $SPQT$ e $SPQ'T'$. Indichiamo con D il segmento TT'' che abbiamo definito come dispersione.

Osserviamo che il settore di campo magnetico è $\widehat{PCQ} = 2\delta$ per le particelle di massa m e $\widehat{PC'Q'} = 2\delta + \beta$ per quelle di massa $m - \Delta m$. Conducendo $C'N$ perpendicolare a QT e nell'ipotesi che sia $\Delta\rho$ piccolo rispetto a ρ e quindi β piccolo rispetto a δ possiamo scrivere, trascurando termini di ordine superiore:

$$(8) \quad D = TT'' = TE + ET'' = MN + QT \operatorname{tg} \beta.$$

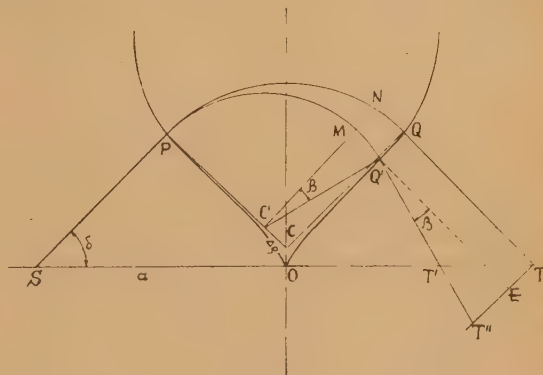


Fig. 3.

Dalla stessa figura ricaviamo:

$$(9) \quad MN = C'N - C'M = \Delta\rho \left(1 + \frac{\operatorname{sen} 2\delta}{\operatorname{tg} \beta}\right) - \rho$$

e anche:

$$(10) \quad QT = \frac{a - \rho \operatorname{sen} \delta}{\cos \delta}.$$

Sempre nello stesso ordine di approssimazione, dal triangolo $CC'Q$ si ricava:

$$(11) \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{\Delta\rho}{\rho} \operatorname{sen} 2\delta.$$

Data la piccolezza di β possiamo sostituire $\operatorname{sen} \beta$ al posto di $\operatorname{tg} \beta$ ottenendo:

$$(12) \quad D = \Delta\rho \left(1 + \frac{2a}{\rho} \operatorname{sen} \delta - 2 \operatorname{sen}^2 \delta\right).$$

Per $0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$ la precedente espressione (12) risulta massima quando:

$$(13) \quad a = 2\rho \operatorname{sen} \delta.$$

Ciò porta la condizione $a \leq 2\rho$. Se fosse $a \geq 2\rho$, la (12) sarebbe sempre massima per $\delta = 90^\circ$; ma noi non consideriamo questo caso che corrisponde ad un incompleto sfruttamento di tutta l'estensione di un campo di 180° .

Da queste conclusioni si vede che la massima dispersione si può ottenere per qualunque valore di δ , purchè sia stabilito il rapporto a/ρ in modo da soddisfare la (13). Il criterio nella scelta di a/ρ ci deve essere suggerito dalle esigenze pratiche elencate prima.

In realtà il campo magnetico passa, per l'effetto dei bordi, con continuità dal valore zero al valore H . La conseguenza di questo fatto è una deviazione finale maggiore di quella prevista geometricamente. Tale effetto si può correggere con uno spostamento rigido del campo nella direzione dell'asse y , purchè l'effetto stesso si eserciti uniformemente su tutte le traiettorie, cioè quando esse entrano ed escono dal campo in direzione normale ai contorni. Questa circostanza si verifica se la tangente al contorno nel punto P di entrata forma con l'asse x un angolo di $90^\circ - \delta$.

Analiticamente:

$$y' = \operatorname{ctg} \delta$$

e tenendo conto della (4):

$$y' = \frac{a - x}{y}.$$

Sostituendo a y e y' i rispettivi valori ottenuti dalla (6) si ha:

$$x = \frac{\rho^2}{a}.$$

Questa condizione, associata alla (13) e tenuto conto della (5), fornisce:

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \delta = 45^\circ.$$

Questo valore, sostituito nella (13) ci dà:

$$(14) \quad a = \rho\sqrt{2}.$$

Con questi dati la dispersione (12) risulta:

$$(15) \quad D = 2\Delta\rho.$$

Si verifica inoltre che:

- il centro di curvatura della traiettoria centrale coincide con l'origine O e quindi: S , O , T , sono allineati;
- il segmento SP è minimo.

Ci proponiamo adesso di valutare l'entità della aberrazione nel caso precedentemente studiato di massima dispersione quando si sostituisca al contorno (6) rispettivamente la retta tangente o il cerchio tangente nel punto P .

Focalizzazione del primo ordine.

Sia $SPQT$ la traiettoria centrale del fascio (fig. 4). Per le considerazioni precedenti, la tangente al contorno in P passa per O ed è inclinata di 45° su x .

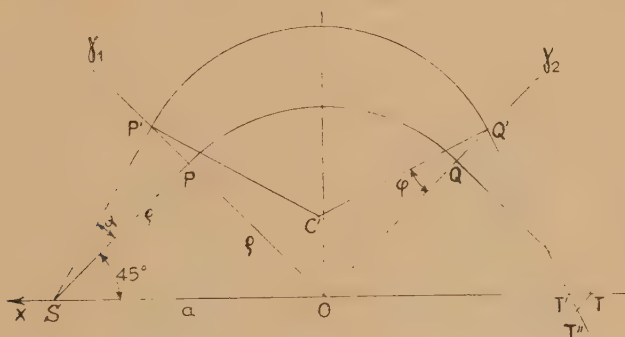


Fig. 4.

Si ha quindi:

$$OP = SP = \rho = a/\sqrt{2}.$$

Assumiamo perciò come approssimazione rettilinea del contorno γ_1 la retta OP . Un'altra particella, identica alla prima ma uscente da S nella direzione SP' seguirà il percorso $SP'Q'T'$. Ci proponiamo di valutare la grandezza del segmento TT'' che abbiamo definito come aberrazione trasversale e che chiamiamo A_r .

Dal triangolo $TT'T'$ si ha:

$$(16) \quad Ar = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \operatorname{tg} \varphi) TT'.$$

Ricaviamo inoltre dalla fig. 4:

$$(17) \quad TT' = a - \rho \sqrt{2} \frac{\operatorname{sen} \alpha + \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi} \cos \varphi.$$

Sostituendo l'espressione (17) in (16) si ha:

$$(18) \quad Ar = \rho(1 + \operatorname{tg} \varphi - \cos \varphi - \operatorname{sen} \alpha).$$

E, sempre da considerazioni geometriche sulla figura, si ottiene φ in funzione di α :

$$(19) \quad \operatorname{sen} \varphi = 1 + \operatorname{tg} \alpha - \cos \alpha.$$

La sostituzione della (19) nella (18) conduce ad una espressione del tipo:

$$(20) \quad Ar = \rho f(\alpha).$$

I valori di $f(\alpha)$, calcolati con le formule precedenti per α da 0° a 10° sono riportati in tab. I. Servendosi di questa tabella si può usare direttamente la (20) per ogni valore di ρ .

TABELLA I.

α	$f(\alpha)$	$F(\alpha)$	Re/Er
0°	0,00000	0,000000	—
1°	0,00033	— 0,000026	12,7
2°	0,00128	+ 0,000124	10,3
3°	0,00297	0,000323	9,2
4°	0,00542	0,000643	8,4
5°	0,00870	0,00131	6,6
6°	0,01287	0,00229	5,7
7°	0,01800	0,00361	5,0
8°	0,02417	0,00549	4,4
9°	0,03146	0,00805	3,9
10°	0,04000	0,01125	3,5

Applichiamo le formule precedenti all'esempio già considerato degli isotopi ^{199}Hg , ^{200}Hg , assumendo $\rho = 40$ cm e $\alpha = 2^\circ$. Usando la tab. I si ottiene:

$$Ar = 40 \times 0,0013 = 0,052 \text{ cm} = 0,52 \text{ mm},$$

la dispersione, per le (7) e (15) è:

$$D = 2\Delta\rho = 40 \times 0,005 = 2 \text{ mm}.$$

Come si vede la sola aberrazione piana dovuta alla approssimazione del contorno, per un valore relativamente piccolo di α , copre già oltre un quarto dell'intervallo di dispersione delle immagini. Se si tiene conto delle altre cause di aberrazione (che saranno esaminate in seguito) e della necessità di aumentare la divergenza iniziale per ottenere più intense correnti ioniche, appare subito la convenienza di migliorare la focalizzazione delle traiettorie ricorrendo ad approssimazioni del secondo ordine.

Focalizzazione del secondo ordine.

Il tipo di approssimazione del contorno (6) con curve di 2° grado, da noi preso in considerazione, consiste nel sostituire al contorno stesso il suo cerchio tangente nel punto P . Vogliamo innanzitutto dimostrare come nelle condi-

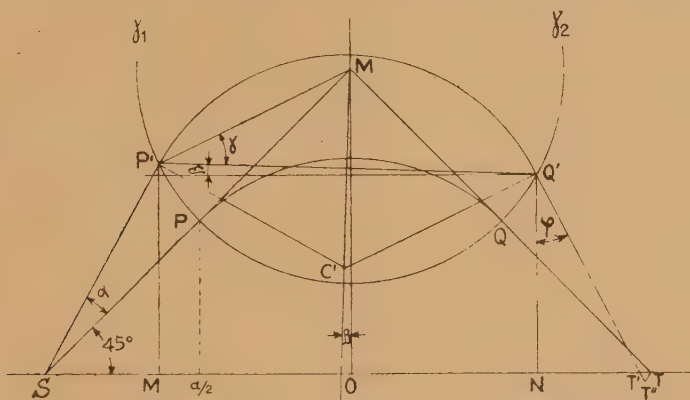


Fig. 5.

zioni già determinate di dispersione massima ($\delta = 45^\circ$, $a/\rho = \sqrt{2}$), si verifica che:

- il raggio del cerchio tangente al contorno γ_1 , nel punto P , è uguale a ρ ;
- il centro del detto cerchio giace sull'asse y ;
- i contorni approssimati γ_1 e γ_2 che ne risultano sono archi dello stesso cerchio.

Osserviamo che essendo $\delta = 45^\circ$, $SP = PO = \rho$, si ha:

$$x_P = a/2 \quad (\text{fig. 5}).$$

Il raggio di curvatura di una curva $y = f(x)$ è dato da:

$$(21) \quad r = \frac{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}{f''(x)}.$$

Dalla (6) calcoliamo le espressioni di $f'(x)$ e $f''(x)$ che, sostituendo nella (21) ci danno $r = \rho$, c. v. d.

La verifica delle altre affermazioni è immediata dall'osservazione dei triangoli rettangoli SPO , SOM .

Il contorno del campo magnetico diviene in questo caso una circonferenza di raggio ρ il cui centro M ha coordinate $(0, \rho\sqrt{2})$.

Analogamente a quanto abbiamo fatto nel caso dell'approssimazione rettilinea, ci proponiamo ora di valutare l'aberrazione trasversale, dovuta alla approssimazione circolare del contorno, e che indichiamo con Ac .

Dal triangolo $TT'T''$ della fig. 5 ricaviamo:

$$(22) \quad Ac = TT'' = TT' \frac{\sqrt{2} \cos \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi}.$$

Ricaviamo anche:

$$(23) \quad TT' = 2a - SP' \cos(45^\circ + \alpha) - P'Q' \cos \beta - Q'N \operatorname{tg} \varphi,$$

dove

$$SP' = \rho Z, \quad P'Q' = 2\rho \cos \gamma,$$

$$Q'N = MP' - P'Q' \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho Z (\cos \alpha + \sin \alpha) - 2\rho \cos \gamma \sin \beta,$$

avendo posto:

$$Z = [2 \cos \alpha - \sqrt{4 \cos^2 \alpha - 3}] ; \quad a = \rho\sqrt{2}.$$

Eseguendo tutte le sostituzioni nella (22) si ricava in definitiva:

$$(24) \quad \frac{Ac}{\rho} = 4 + \frac{Z \sin \alpha}{\sqrt{1 - Z^2 \sin^2 \alpha}} (2 - \cos \alpha) - 2Z \cos \alpha - \\ - 2\sqrt{1 - Z^2 \sin^2 \alpha} - \sin \alpha.$$

Anche in questo caso si giunge quindi ad una espressione del tipo:

$$Ac = \rho F(\alpha).$$

I valori di $F(\alpha)$, calcolati con la formula precedente, sono riportati in tab. I per α da 0° a 10° .

Applicando questi dati all'esempio precedente degli isotopi ^{199}Hg , ^{200}Hg , per $\alpha = 2^\circ$, $\rho = 40$ cm, si ottiene $Ac = 0,049$ mm, mentre con approssimazione rettilinea si aveva $Ar = 0,52$ mm.

Potere risolutivo.

Se indichiamo con $R = D/\lambda$ il potere risolutivo nei vari casi, possiamo confrontare quello della approssimazione rettilinea R_r con quello della approssimazione circolare R_c . In tab. I sono riportati i valori di R_c/R_r , per α da 0° a 10° .

Caso della approssimazione circolare con raggio infinito.

Dalla (21) vediamo che per $y'' = 0$ il raggio del cerchio tangente al contorno (6) diviene infinito. È facile vedere che tale circostanza si verifica per:

$$(25) \quad x_f = \frac{3a + \sqrt{9a^2 - 8\rho^2}}{2},$$

che è il punto di inflessione della curva (6).

L. KERWIN⁽¹⁰⁻¹¹⁾ ne suggerisce l'applicazione pratica per la sua caratteristica di unire il potere focalizzante del secondo ordine con il profilo rettilineo del contorno. Osserviamo però che ciò si ottiene sacrificando l'incidenza normale delle traiettorie sul contorno (con i relativi vantaggi) poichè è facile verificare che l'ascissa del punto di inflessione, data dalla (25) coincide con quella di entrata a incidenza normale solo nel caso limite di $\delta = 90^\circ$. D'altra parte abbiamo dimostrato che la stessa dispersione massima $2\Delta\rho$ si può ottenere per $\delta = 45^\circ$, cioè in condizioni notevolmente diverse.

Inoltre, a parità di settore magnetico, 2δ , il tratto PQ di traiettoria non risulta più minimo. Perciò ci sembra che, quando sia richiesta come condizione necessaria una focalizzazione del secondo ordine, sia preferibile ricorrere alla approssimazione circolare, precedentemente studiata, la quale presenta tutti i vantaggi, mentre la costruzione di espansioni polari cilindriche non pone difficoltà maggiori di quella di espansioni polari a sezione trapezoidale.

Altre cause di aberrazione.

I valori del potere risolutivo riportati in tab. I non avrebbero alcun valore pratico se non si tenesse conto degli altri effetti di aberrazione che entrano in gioco nel funzionamento dello spettrografo di massa. Per completare il nostro studio ci proponiamo perciò di passarli rapidamente in esame e di darne una valutazione quantitativa.

Sommariamente possiamo suddividerli così:

- a) effetti geometrici;
- b) variazioni accidentali dei parametri;
- c) dimensioni della sorgente.

Nello studio fatto abbiamo ammesso che tutte le traiettorie si svolgessero in un piano xy perpendicolare alla direzione del campo magnetico.

In realtà il fascio di ioni presenta una divergenza iniziale anche nella direzione dell'asse z . Consideriamo quindi una particella di velocità v , inclinata di un angolo β rispetto al piano xy . La proiezione della sua traiettoria su xy è la curva che essa descriverebbe nello stesso piano con velocità $v \cos \beta$.

In uno spettrografo normale la dimensione dell'immagine secondo l'asse z non supera i 0,02 della lunghezza delle traiettorie, per cui si ha: $\beta \leq 1^\circ$; $\cos \beta \geq 0,9998$. Il problema si riconduce quindi a considerare una variazione accidentale $\Delta v/v = 0,0002$.

I parametri che possono subire variazioni accidentali sono:

— la velocità iniziale v che ammettiamo abbia una distribuzione maxwelliana all'uscita della sorgente e prima di subire la caduta di tensione V' ;

— il potenziale acceleratore V , per l'instabilità dell'alimentatore;
 — il campo magnetico H , per l'instabilità della corrente di eccitazione del magnete.

Differenziando la (1) rispetto a v e la (3) rispetto a H e V e prendendo i valori assoluti si ha:

$$\Delta\rho_1 = \frac{m}{eH} \Delta v,$$

$$\Delta\rho_2 = \sqrt{\frac{2mV}{e}} \frac{\Delta H}{H^2},$$

$$\Delta\rho_3 = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{m}{2eV}} \Delta V.$$

Nel calcolo di $\Delta\rho_1$ possiamo tener conto anche del valore $\Delta v = 0,0002v$ precedentemente trovato per l'inclinazione β delle traiettorie.

Per quanto riguarda il Δv dovuto alla distribuzione statistica delle velocità nella sorgente possiamo valutarlo in questo modo: se u_0 è la velocità media di agitazione termica degli ioni, per un gas monoatomico si avrebbe:

$$u_0 = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Ammettendo la distribuzione maxwelliana, si trova che l'86 % degli ioni ha velocità iniziali comprese nell'intervallo $\Delta v = 1,5\sqrt{u_0}$. (La considerazione di tutte le velocità teoricamente possibili ci porterebbe naturalmente ad una aberrazione infinita).

L'insieme delle cause finora esaminate produce, in definitiva, una variazione accidentale del raggio di curvatura ρ , con conseguente effetto di aberrazione dell'immagine. Se poniamo:

$$\Delta\rho = \Delta\rho_1 + \Delta\rho_2 + \Delta\rho_3,$$

possiamo calcolare l'aberrazione prodotta servendoci delle formule già trovate per la dispersione che, nei casi da noi considerati, è:

$$D = 2\Delta\rho.$$

Si può dimostrare che, nel caso della focalizzazione simmetrica, le dimensioni dell'immagine sono uguali a quelle dell'oggetto. Nello spettrografo di massa l'oggetto è rappresentato dalla fenditura di entrata la cui ampiezza è un dato strumentale.

Applichiamo ancora le precedenti considerazioni all'esempio degli isotopi ^{199}Hg , ^{200}Hg :

Se facciamo:

$$\rho = 40 \text{ cm}; \quad H = 3000 \text{ gauss}; \quad e = 1,6 \cdot 10^{-20} \text{ u.e.m.a.}; \quad m = 200 \cdot 1,6 \cdot 10^{-24} \text{ g},$$

la (1) fornisce:

$$v = 6 \cdot 10^6 \text{ cm/s}.$$

Ponendo:

$$R = 8,31 \cdot 10^7 \text{ erg mol}^{-1} \text{ gradi}^{-1}; \quad T = 1500 \text{ }^\circ\text{K}; \quad M = 200,$$

si trova:

$$\Delta v = 15 \cdot 10^3 \text{ cm/s}.$$

Eseguendo i calcoli con le formule precedenti si ottiene:

$$\Delta \rho_1 = 0,1 \text{ mm},$$

$$\Delta \rho_2 = 0,4 \text{ mm (avendo supposto: } \Delta H/H = 0,001)$$

$$\Delta \rho_3 = 0,2 \text{ mm (avendo supposto: } \Delta V/V = 0,001).$$

E in definitiva:

$$A = 2\Delta \rho = 1,4 \text{ mm}.$$

A questo valore si deve aggiungere quello dovuto all'approssimazione del contorno che abbiamo già visto essere: 0,52 mm nel caso rettilineo e 0,049 mm nel caso circolare per $\alpha = 2^\circ$.

Si ottiene quindi l'aberrazione totale $A_1 = 1,92$; $A_2 = 1,449$ rispettivamente.

Poichè la dispersione è $D = 2 \text{ mm}$ si vede che, nell'esempio considerato, con focalizzazione del secondo ordine si possono ottenere ancora immagini separate con una fenditura di entrata di 0,5 mm, mentre con il profilo rettilineo, le immagini risultano già parzialmente sovrapposte con fenditura di 0,1 mm.

Ringrazio il prof. T. FRANZINI per i preziosi suggerimenti e le proficue discussioni sull'argomento.

SUMMARY

The problem of the focusing of charged particles is an object of particular studies in connection of its application in mass spectrometers of the magnetic field type. The cases of symmetric focusing both perfect and approximated of the 1st and 2nd order are duly examined in the condition of utmost dispersion of the images. The rate of aberration is calculated in both cases. The need of a 2nd order focusing is proved in order to reach a good separation of the isotopes of the heaviest elements when the initial divergence of the tracks is less than 10° . Other causes of aberration strictly connected with the operating of the mass spectrometer are particularly examined.

Emulsioni nucleari studiate al microscopio elettronico.

G. BARONI e C. CASTAGNOLI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R., Roma

(ricevuto il 28 Marzo 1950)

Riassunto. — Si osservano al microscopio elettronico emulsioni fotografiche per la fisica nucleare con particolare riferimento alla forma e alle dimensioni dei granuli e al processo di sviluppo dei cristalli di AgBr impressionati.

1. — Introduzione.

L'uso del microscopio elettronico nello studio dei fenomeni fotografici fu introdotto da M. VON ARDENNE ⁽¹⁾ nel 1940 ed esteso poi allo studio dei processi di sviluppo e fissaggio da C. E. HALL e A. L. SCHOEN ⁽²⁾ i quali hanno messo chiaramente in luce la struttura filamentosa dei granuli di bromuro di argento sviluppati. Nell'unica ricerca finora effettuata con il microscopio elettronico sulle emulsioni nucleari, DEMERS e KNOWLES ⁽³⁾ si sono invece limitati alla determinazione delle dimensioni medie dei granuli di bromuro di argento.

Abbiamo ritenuto di un certo interesse estendere le osservazioni fatte sulle emulsioni normali a quelle speciali per fisica nucleare, applicando una tecnica precedentemente descritta ⁽⁴⁾.

In queste ricerche preliminari abbiamo preso in esame alcuni problemi sui processi di formazione dell'immagine latente e di sviluppo, e sull'aspetto, la forma e le dimensioni dei granuli.

Per l'osservazione ci siamo serviti del microscopio elettronico del Labora-

⁽¹⁾ M. VON ARDENNE: *Zeits. f. angew. Phot.*, **2**, 14 (1940).

⁽²⁾ C. E. HALL e A. L. SCHOEN: *J.O.S.A.*, **31**, 281 (1941).

⁽³⁾ J. KNOWLES e P. DEMERS: *Phys. Rev.*, **72**, 535 (1947).

⁽⁴⁾ G. BARONI e C. CASTAGNOLI: *Rend. Ist. Sup. di Sanità* (in corso di stampa).

torio di Fisica dell'Istituto Superiore di Sanità ⁽⁵⁾, operando con l'ingrandimento di 18000 diametri; inoltre si è fatto uso, per la tecnica delle ombre, dell'apparecchio realizzato in quel laboratorio per la metallizzazione dei preparati ⁽⁶⁾.

2. - Sul meccanismo di formazione dell'immagine latente.

Le teorie sino ad oggi proposte sul meccanismo di formazione dell'immagine latente fanno prevedere, nel caso di impressione dovuta alla luce, una sua localizzazione nel granulo diversa da quella che si ha nel caso di impressione provocata da particelle ionizzanti. Secondo CÜER ⁽⁷⁾ infatti le immagini latenti create da particelle ionizzanti si troverebbero all'interno del granulo mentre, secondo la teoria di GURNEY e MOTT ⁽⁸⁾ quelle originate da fotoni si troverebbero in superficie. Abbiamo perciò cercato di mettere in evidenza con l'uso del microscopio elettronico una eventuale diversità di processi di sviluppo nei due casi. I granuli di una emulsione Ilford C₂ diluita venivano posti sul portaoggetti del microscopio elettronico illuminati e poi trattati con diversi sviluppatori. Si ritrovava così (vedi fig. 1) una struttura filamentosa dei granuli di bromuro di argento sviluppati chimicamente, simile a quella ormai ben nota dei granuli delle emulsioni normali.

Altri portaoggetti venivano preparati invece con la stessa emulsione la quale era stata precedentemente immersa in una soluzione di nitrato di torio. Anche servendosi della tecnica delle ombre (che rende possibile l'osservazione della struttura dei sottilissimi filamenti d'argento ⁽⁴⁾) non era possibile scorgere nell'aspetto dei granuli così sviluppati alcuna differenza (vedi fig. 2).

Si può quindi dedurre da questa serie di osservazioni che o l'aspetto del granulo sviluppato non dipende dalla ubicazione dell'immagine latente nel granulo originario, sia pure sottoposto all'azione di vari tipi di sviluppatori, o che, sia nel caso delle particelle ionizzanti che in quello di fotoni si ha una distribuzione dell'immagine latente fra la superficie e l'interno del granulo. Il confronto con il risultato delle esperienze di natura puramente chimica, di BERG, MARRIAGE e STEVENS ⁽⁹⁾ potrebbe avvalorare maggiormente questa seconda alternativa.

3. - Sull'azione selettiva dell'immagine latente sullo sviluppo.

Limitandoci al caso dell'immagine latente creata da particelle ionizzanti c'è da notare che un altro problema interessante il meccanismo di formazione dell'immagine latente è quello di stabilire se un granulo diventa sviluppabile

⁽⁵⁾ D. BOCCIARELLI e G. C. TRABACCHI: *Rend. Ist. Sup. di Sanità*, **9**, 762 (1946).

⁽⁶⁾ D. BOCCIARELLI e G. C. TRABACCHI: *Rend. Ist. Sup. di Sanità*, **11**, 791 (1943).

⁽⁷⁾ P. CÜER: *Sci. et ind. phot.* (2) **18**, 321 e 353 (1947).

⁽⁸⁾ R. W. GURNEY e N. F. MOTT: *Proc. Roy. Soc., A* **164**, 151 (1938).

⁽⁹⁾ W. F. BERG, A. MARRIAGE e G. W. W. STEVENS: *J.O.S.A.*, **31**, 385 (1941).

solo nel caso di ionizzazione diretta per azione della particella incidente oppure se è possibile una induzione dello sviluppo da un granulo all'altro. Sembra ormai accertato che è questo il caso che si verifica, ma diversi sono i meccanismi proposti per spiegarlo, alcuni basati su processi fisici precedenti lo sviluppo, altri su processi chimici durante lo sviluppo.

Secondo CÜER ⁽⁵⁾ gli elettroni emessi al passaggio delle particelle ionizzanti possono creare immagini latenti in numerosi granuli vicini prima di essere arrestati, quindi la sviluppabilità sarebbe dovuta alla particella incidente attraverso raggi δ molto molli creati al suo passaggio. Un altro meccanismo possibile può consistere nella formazione dell'immagine latente per azione dei fotoni emessi da atomi non ionizzati ma solo eccitati dalla particella carica.

Invece secondo altri Autori (ad esempio CLERC ⁽¹⁰⁾), che si basano sull'analisi del processo di sviluppo dato dalle più recenti teorie e sulle osservazioni microelettroniche di HALL e SCHOEN ⁽²⁾, l'induzione avverrebbe durante il processo di sviluppo: i filamenti di Ag metallico che fuoriescono dai cristalli di AgBr penetrerebbero nei granuli contigui rendendoli a loro volta sviluppabili.

Il problema è ovviamente di difficile soluzione. Vorremmo però notare che dalle osservazioni al microscopio elettronico di HALL e SCHOEN non è possibile trarre senz'altro la conclusione di CLERC. Infatti le emulsioni considerate da quegli autori sono state sviluppate dopo esposizione alla luce, e non vi è possibilità di stabilire quali siano i cristalli impressionati dai fotoni e quelli non colpiti. Di conseguenza, osservando un granulo sviluppato non è possibile stabilire se esso lo sia per processo primario o per processo secondario, e perdono quindi ogni significato le affermazioni riguardanti questo eventuale processo secondario.

Abbiamo ritenuto che una indicazione utile potesse essere data dalla osservazione dei granuli sviluppati di fondo di una lastra non irradiata e non illuminata. Questi granuli (che nel caso delle lastre da noi usate erano molto rari) sono facilmente distinguibili per la loro struttura filamentosa dagli altri non sviluppati (vedi fig. 2). Il fatto che nella quasi totalità dei casi da noi osservati essi si trovino immersi in gruppi di granuli non sviluppati, può ritenersi in disaccordo con la teoria dello sviluppo indotto per azione dei filamenti di Ag. In questo caso infatti i granuli di fondo dovrebbero indurre la sviluppabilità anche ai granuli che sono a contatto, contrariamente all'evidenza sperimentale.

Riteniamo inoltre di un certo interesse mostrare la fig. 3 ottenuta da una lastra Ilford C₂ irradiata con Th(NO₃)₄: vi si vede un gruppo A di granuli non attraversati dalle particelle α del Th e quindi non sviluppati, al contrario dei granuli dei gruppi B e C ionizzati e sviluppati. Il gruppo C può servire (sia pure con qualche incertezza) ad appoggiare la tesi che il processo di induzione è di natura fisica e non chimica. Infatti, secondo l'ipotesi di CLERC, i granuli sviluppati perchè colpiti dalla particella ionizzante dovrebbero indurre lo sviluppo anche sugli altri granuli che sono a contatto: il che non è benchè ci si trovi in condizioni di sovrasviluppo. La limitata sviluppabilità dei granuli del gruppo C è invece coerente con le ipotesi di CÜER, secondo le quali

⁽¹⁰⁾ L. P. CLERC: *Structure et propriété des couches photographiques* (1949), p. 54.

verrebbero sviluppati solo i granuli direttamente ionizzati o colpiti dai raggi δ creati al passaggio della particella.

Un'ultima conferma può essere data dal fatto constatato da DEMERS ⁽¹¹⁾ che nelle emulsioni concentrate a grani molto fini (circa $0,1 \mu$) ci sia un raggio di azione di circa 3 grani consecutivi (per una particella α di energia media) mentre esso si riduce praticamente ai soli granuli attraversati nelle emulsioni a grani più grossi.

Riteniamo che un criterio definitivo di scelta possa esser fornito dalla osservazione microelettronica di tracce di particelle sviluppate solo chimicamente e solo fisicamente, avendo in un nostro precedente lavoro mostrato come, con questo ultimo metodo di sviluppo, non vi sia fuoriuscita di filamenti di argento dai granuli. È in questo senso che stiamo indirizzando le nostre osservazioni.

4. - Sulla gelatina delle emulsioni fotografiche.

Senza affrontare l'analisi del processo di sviluppo secondo le varie teorie, ci siamo limitati ad alcune osservazioni sull'importante influenza che la gelatina esercita in questo fondamentale processo fotografico.

È noto che il bromuro di argento precipitato in assenza di gelatina e sviluppato senza esposizione alla luce viene immediatamente ridotto ad argento metallico: basta però aggiungere anche solo 1 % di gelatina perchè la velocità di riduzione diminuisca notevolmente. SHEPPARD, per spiegare questo ed altri fenomeni ha ammesso (benchè non ve ne fosse diretta conferma sperimentale) che la gelatina formi composti di addizione con il bromuro di argento, cioè che alcuni gruppi attivi di essa si fissino agli atomi superficiali del granulo ⁽¹²⁾.

Successivamente SCHWARZ ed URBACH ⁽¹³⁾ partendo dalla considerazione che il bromuro di argento delle emulsioni fotografiche viene precipitato adoperando un eccesso di bromuro di potassio, in modo che si viene a creare sulla superficie del granulo uno strato di ioni negativi Br adsorbiti, hanno ritenuto che l'azione della gelatina fosse proprio quella di proteggere questo strato. L'immagine latente, secondo questi autori, non rappresenterebbe altro che una soluzione di continuità di tale strato, e la sviluppabilità dei granuli impressionati sarebbe dovuta alla possibilità per gli anioni riducenti di superare la barriera di potenziale che esiste intorno ai granuli e di giungere così a contatto diretto con il bromuro di argento ⁽¹⁴⁾.

Abbiamo allora studiato il possibile fenomeno di adsorbimento della gelatina da parte dei granuli fotografici con il microscopio elettronico.

⁽¹¹⁾ P. DEMERS: *Can. Journ. Research*, **25**, 223 (1947).

⁽¹²⁾ S. E. SHEPPARD: *Phot. Journ.*, **69**, 330 (1949).

⁽¹³⁾ G. SCHWARZ e F. URBACH: *Zeits. wiss. Phot.*, **31**, 77 (1932).

⁽¹⁴⁾ Una conferma di questa teoria può essere il fatto che i cristalli di Ag Br precipitati in eccesso di nitrato di argento, perciò circondati da uno strato di ioni Ag positivi, si comportano come se non ci fosse gelatina (vengono sviluppati anche se non impressionati dalla luce).

La fig. 4 mostra i granuli di una lastra Ilford C₂ circondati da un alone di circa $0,1 \mu$, che potrebbe corrispondere alla lunghezza di una molecola di gelatina (838 Å secondo ASTBURY⁽¹⁵⁾).

La fig. 5 mostra i granuli di una lastra trattata con nitrato di torio, diluita e poi sviluppata sul portaoggetti del microscopio elettronico; questi granuli sono naturalmente solo in parte sviluppati ed è interessante notare come essi non abbiano l'alone, mentre quelli non sviluppati lo mostrano molto chiaramente.

Una ulteriore osservazione dei granuli sviluppati, fatta con la tecnica delle ombre ha portato al risultato rilevabile dalla fig. 6: è possibile vedere come attorno ai granuli sviluppati il fondo della membrana portaoggetti sia molto accidentato; in condizioni particolarmente buone di fuoco (vedi fig. 7) si rileva una struttura filiforme. Questi fili che terminano con un arrotondamento (di difficile interpretazione) hanno una lunghezza media di $0,1 \mu$: si può quindi pensare che essi rappresentino le grosse molecole di gelatina: la lunghezza media di ogni catena molecolare è infatti di circa 900-1000 Å e lo spessore di circa 5 Å (al di là del potere risolutivo del microscopio elettronico e quindi non rilevabile senza il metodo delle ombre). Questa interpretazione può trovare conferma nel fatto che la presenza di tali strutture è molto accentuata nel caso di emulsioni meno diluite anche in zone lontane dai granuli, come è ovvio pensare se esse rappresentano effettivamente grosse molecole di gelatina (vedi fig. 8).

L'addensarsi intorno ai granuli di questi fili rende plausibile l'interpretazione precedentemente data dell'alone osservato.

5. - Dimensioni dei granuli delle emulsioni nucleari.

Lo studio sistematico della distribuzione delle dimensioni dei granuli di AgBr in relazione alle proprietà delle emulsioni fu iniziato da MEES⁽¹⁶⁾ nel 1915 e continuato poi da SVEDBERG e collaboratori⁽¹⁷⁾ dopo il 1920. La prima relazione quantitativa tra le caratteristiche sensitometriche e la curva di distribuzione delle dimensioni dei granuli è stata trovata da WIGHTMANN e SHEPPARD⁽¹⁸⁾ con un metodo ottico diretto con microscopio ad alto potere risolutivo, migliorato⁽¹⁹⁾ poi con l'uso di microscopi a radiazione ultravioletta di potere risolutivo $0,13 \mu$. Questo metodo però, come è ovvio, è limitato dal potere risolutivo del microscopio ottico e le curve ottenute cessano di avere valore per i piccoli granuli.

L'uso del microscopio elettronico diventa quindi indispensabile per questo studio non appena si passi dalle emulsioni normali a quelle nucleari aventi granuli del diametro medio di $0,1 \mu \div 0,6 \mu$.

(15) W. T. ASTBURY: *Journ. Int. Soc. Leather Trade Chemists*, **24**, 69 (1940).

(16) K. MEES: *Journ. Frank. Inst.*, **151**, 179 (1915).

(17) T. SVEDBERG, R. E. SLADE e G. I. HIGSON: *Phot. Journ.*, **5**, 260 (1919); *Zeits. wiss. Phot.*, **20**, 36 (1920).

(18) E. P. WIGHTMANN e S. E. SHEPPARD: *Journ. Phys. Chem.*, **25**, 181 e 561 (1921).

(19) A. P. H. TRIVELLI e L. V. FOSTER: *J.O.S.A.*, **21**, 124 (1931).

Ma all'interesse che la determinazione della distribuzione in ampiezza dei granuli offre per lo studio delle caratteristiche sensitometriche delle emulsioni, nel caso di lastre nucleari si unisce l'utilità della determinazione delle dimensioni medie (diametro medio, volume medio, area proiettiva media) dei granuli di AgBr.

Queste quantità infatti compaiono nelle formule delle teorie che tentano di interpretare i fenomeni di ionizzazione delle lastre. Ad esempio, nella formula data da ZHDANOV e DEMERS ⁽²⁰⁾ per la minima distanza Δ dei granuli per particelle α a fine percorso, si ha:

$$\Delta = \frac{\bar{d}}{0,23 C},$$

dove \bar{d} è il diametro medio dei granuli e C la concentrazione di AgBr in g/cm³. Anche nella determinazione del numero minimo di coppie di ioni necessari alla formazione della immagine latente è essenziale la conoscenza di \bar{d} ⁽²¹⁾. Nel calcolo del potere frenante delle emulsioni fotografiche ⁽²²⁾ si richiede la conoscenza anche della massa media dei granuli, del diametro medio, ecc.

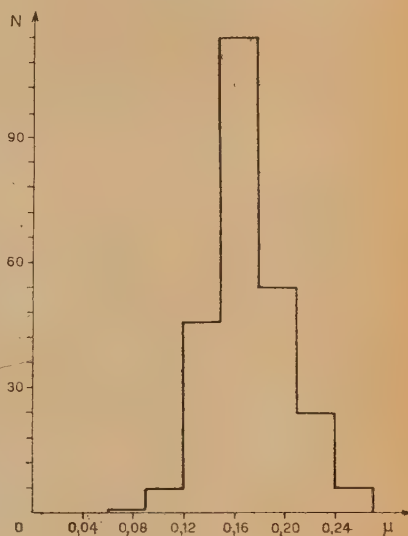
Per tutte queste ragioni abbiamo pensato di studiare al microscopio elettronico la distribuzione in ampiezza dei granuli delle emulsioni Ilford per fisica nucleare sensibili al minimo di ionizzazione tipo G_5 .

Il metodo consiste nello sciogliere l'emulsione, diluirla ed osservarla direttamente sfruttando anche il fenomeno già descritto della migrazione di Ag metallico per azione del pennello elettronico; è così possibile misurare le dimensioni dei granuli anche non isolati con notevole risparmio di tempo e di fotografie. Le misure dell'area sulle fotografie si eseguono secondo il metodo di LOVELAND ⁽²³⁾ reso particolarmente semplice dall'uniforme contorno esagonale dei granuli.

I risultati sono mostrati nell'istogramma n. 1. Il valore del diametro medio dei granuli osservati è dato da

$$\bar{d} = 0,17 \mu.$$

La curva di distribuzione è bene rappresentabile con una gaussiana come



Istogramma n. 1.

⁽²⁰⁾ J. ZHDANOV e P. DEMERS: *Journ. de Phys. et radium*, 6, 283 (1935).

⁽²¹⁾ J. H. WEBB: *Phys. Rev.*, 74, 511 (1948).

⁽²²⁾ P. CÜER: *Compt. Rend.*, 223, 1121 (1946).

⁽²³⁾ K. MEES: *The Theory of the Photographic Process* (New York, 1946), p. 40.

ci si può attendere da un precipitato chimico. È da notare la notevole uniformità dei granuli di queste emulsioni speciali.

Le dimensioni medie dei granuli delle altre emulsioni osservate corrispondono bene ai risultati ottenuti da DEMERS-KNOWLES. L'ingrandimento dato dal microscopio elettronico da noi usato era valutato sulla base di una taratura eseguita secondo il metodo di BACKUS e WILLIAMS ⁽²⁴⁾.

6. - Forma dei granuli.

Lo studio della forma dei granuli delle emulsioni speciali per fisica nucleare è impossibile con i microscopi ottici, dato il loro basso potere risolutivo, ed è quindi necessario ricorrere all'osservazione microelettronica. KNOWLES e DEMERS ⁽³⁾ hanno affermato che i granuli di AgBr delle lastre nucleari appaiono al microscopio elettronico come esagoni di area molto regolare. Inoltre essi sarebbero piatti, non superando lo spessore la sesta parte del diametro.

Per la determinazione del volume medio e della massa media dei granuli il problema della determinazione della loro forma presenta un certo interesse. Abbiamo allora cercato di risolverlo applicando la tecnica delle ombre. È evidente infatti che è possibile risalire, sia pure con qualche incertezza, dalla conoscenza dell'angolo formato dalla direzione dei raggi molecolari incidenti con il piano orizzontale della membrana portaoggetti, alla conoscenza della dimensione verticale degli oggetti osservati con la semplice misura della lunghezza dell'ombra proiettata (vedi fig. 9).

Avendosi nel dispositivo da noi usato per la metallizzazione del preparato un angolo di 12° , dall'osservazione di numerosi granuli siamo giunti a stabilire che il rapporto tra il diametro orizzontale e verticale ha il valore medio di 1,1.

Possiamo così concludere nei limiti di precisione consentiti dal metodo che i granuli sono ugualmente sviluppati nelle tre dimensioni. Inoltre è da notare che se i granuli fossero piastrelle essi avrebbero la possibilità di disporsi in varie inclinazioni (soprattutto negli agglomerati) creando così una gamma molto varia per le dimensioni dei granuli e delle ombre proiettate, cosa questa che invece non si constata.

Questa conclusione alla quale siamo giunti servendoci della tecnica delle ombre è confortata dall'osservazione normale. Sfruttando infatti il fenomeno della migrazione dell'Ag metallico in seno agli ammassi di granuli è possibile osservare direttamente la forma dei cristalli. Ad es., nella fig. 10 ⁽²⁵⁾ è possi-

⁽²⁴⁾ R. E. BACKUS e R. C. WILLIAMS: *Journ. App. Phys.*, **19**, 1186 (1948).

⁽²⁵⁾ In questa fotografia ogni granulo mostra una protuberanza o un corno. Come si è già segnalato ⁽⁴⁾ questa fuoriuscita di Ag metallico dal granulo è dovuta all'azione del pennello elettronico sul cristallo di AgBr ed è osservabile tutte le volte che la sua intensità viene portata a valori troppo forti. Il granulo che dapprima appare uniformemente scuro, si svuota rapidamente e l'Ag fuoriesce. Che le protuberanze siano un effetto dovuto al fascio elettronico appare chiaro dal fatto che esse non hanno ombra dietro di sé.

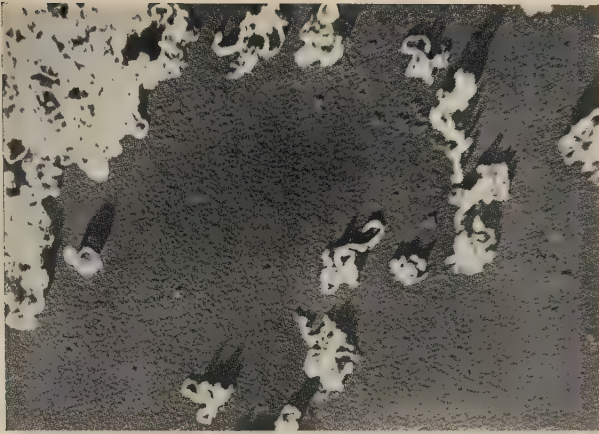


Fig. 1.



Fig. 2.

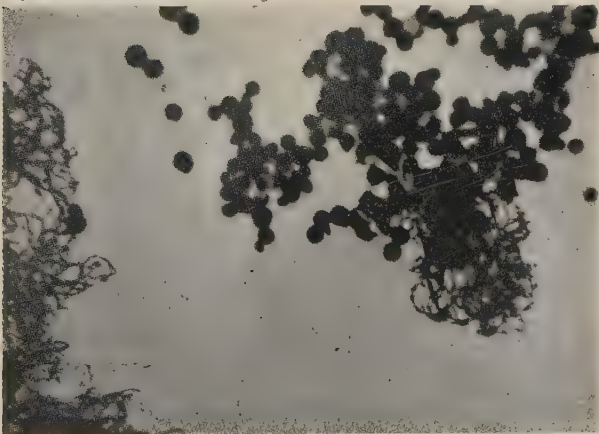


Fig. 3.

$1\mu \equiv \text{mm } 18$



Fig. 8.

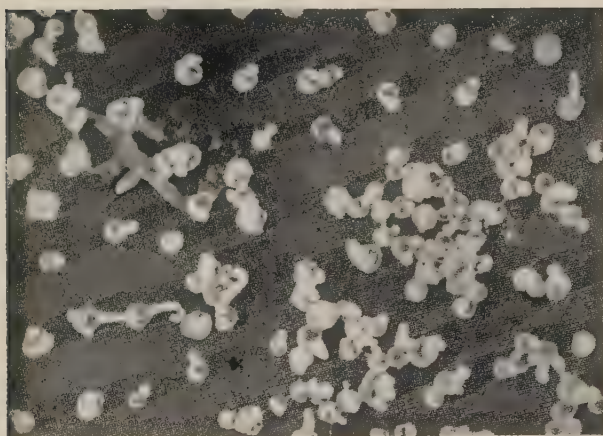


Fig. 9.

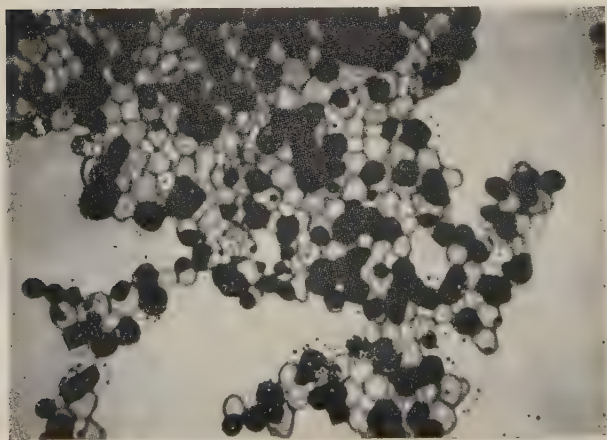


Fig. 10.

1 μ mm 18

bile riconoscere cristalli appartenenti alla classe ottaedrica e dodecaedrica del sistema regolare. La presenza di forme esagonali e triangolari è facilmente spiegabile con una crescita differenziale delle facce di un ottaedro.

Desideriamo esprimere la nostra gratitudine al prof. G. C. TRABACCHI ed alla prof. N. MORTARA per averci aiutato nel nostro lavoro ed al dr. G. CORTINI per i suoi utili consigli.

SUMMARY

The form and the size of the AgBr grains and the development process in some photographic plates for nuclear researches were observed with a 18000 X electron microscope.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Spettro di assorbimento di metacresolo nel primo ultrarosso.

A. CICCONE

Istituto di Fisica dell'Università di Pisa

(ricevuto il 14 Aprile 1950)

In una nota precedente ⁽¹⁾ fu brevemente comunicato che i massimi di assorbimento del gruppo ossidrilico nel metacresolo, in soluzione 0,33 mol. in tetracloruro di carbonio, si presentano

il quale è stato ottenuto con lo stesso procedimento degli altri.

Avendo con il metacresolo esaurita la serie dei tre cresoli isomeri e dell'alcool benzilico, sarà opportuno un con-

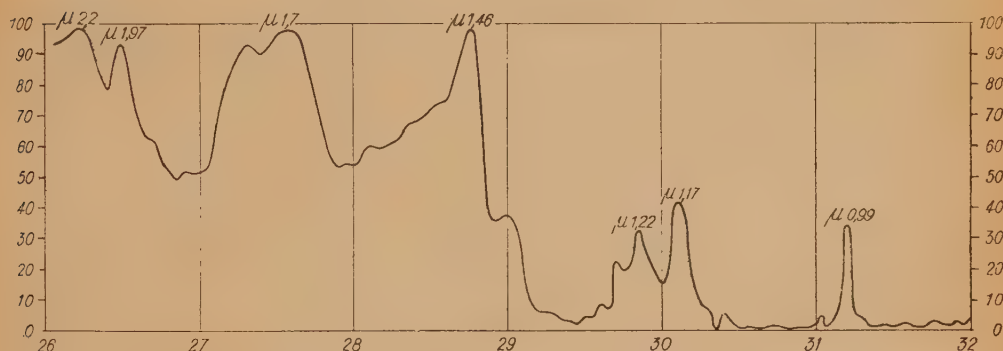


Fig. 1.

nella stessa posizione spettroscopica di quella degli altri due isomeri, para e ortocresolo.

Dalle misure eseguite per il rilievo completo dello spettro di questo terzo isomero si è ricavato il grafico della fig. 1

fronto fra i rilievi degli spettri di questi quattro composti.

Gli spettri dei tre cresoli (per gli spettri del para e dell'ortocresolo cfr. ⁽¹⁾) sono quasi ma non perfettamente identici: le due strisce intorno a 2,2 e a 1,7, come fu già rilevato, si presentano anche non in soluzione: la prima in tutti i composti a struttura esagonale, la se-

⁽¹⁾ A. CICCONE: *Nuovo Cimento*, 6, 500 (1949).

conda in tutti i composti contenenti carbonio combinato con idrogeno.

I due massimi di assorbimento approssimativamente a μ 1,22 e a μ 1,17 che si osservano nelle soluzioni dei tre isomeri in CCl_4 , sono i corrispondenti dei due massimi a μ 1,21 e a μ 1,14 che si osservano nella soluzione di alcool benzilico in CCl_4 ⁽²⁾ anche essi da attribuirsi alla presenza del gruppo CH.

Inoltre anche le tre strettissime e intense bande del gruppo OH hanno negli spettri dei tre isomeri lo stesso aspetto e la stessa posizione nei massimi di assorbimento, ma questi massimi sono, rispetto ai corrispondenti dell'alcool benzilico, sensibilmente spostati verso le lunghezze d'onda maggiori.

Questo risultato è in stretta analogia con quello già ottenuto dal BERTI nel confronto fra il fenolo e l'alcool etilico ⁽³⁾,

e per l'interpretazione potremmo ripetere l'osservazione data come plausibile, in fine alla nota postuma del BERTI, dal prof. PUCCIANI.

D'altra parte un più piccolo spostamento si riscontra tra i massimi dei tre cresoli a μ 0,987, μ 1,46, μ 1,97 e i corrispondenti massimi del fenolo a μ 0,988, μ 1,48, μ 1,98, e ciò si può pensare che sia in relazione con la più accentuata reazione acida del fenolo.

La finezza dei rilievi spettroscopici ci permette di assicurare questi risultati rispetto al confronto fra le posizioni dei massimi di assorbimento e alle piccole differenze di lunghezza d'onda: quanto poi al valore assoluto di queste, ripetiamo, che abbiamo allo studio un metodo ottico diretto per rivedere, con grande precisione, la graduazione dello strumento.

Desidero, infine, ringraziare il prof. L. PUCCIANI per l'interesse costantemente dimostratommi nello svolgimento di questo e dei precedenti lavori.

⁽²⁾ A. CICCONE: *Nuovo Cimento*, 5, 489 (1948). Questi massimi di assorbimento non sono segnati sul grafico, ma sono nell'interno della divisione 30.

⁽³⁾ L. BERTI: *Nuovo Cimento*, 5, 44 (1948).

Ancora sulla diagonalizzazione della hamiltoniana nella teoria dei campi d'onda.

B. FERRETTI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R., Roma

(ricevuto il 17 Aprile 1950)

Recentemente ho posto in rilievo ⁽¹⁾ come mediante l'operatore di DYSON-FEYNMANN $S(\sigma)$ si possa diagonalizzare l'hamiltoniana di un sistema costituito da due campi d'onda accoppiati almeno nel caso in cui la densità di interazione $\mathcal{H}'(x)$ non dipenda dalle derivate degli operatori di campo.

Scopo della presente nota è di far osservare come si possa generalizzare il precedente risultato anche ai casi di interesse fisico in cui l'interazione dipende dalle derivate degli operatori di campo mediante un artificio simile a quello usato da KANESAWA e TOMONAGA nel trattare il problema dell'interazione tra campo elettromagnetico e campo mesonico ⁽²⁾. Quando l'interazione non contiene derivate degli operatori di campo, la parte del tensore della energia e dell'impulso che corrisponde all'interazione è uguale a $\delta_{ik}\mathcal{L}'(x)$ dove $\mathcal{L}'(x)$ è la densità di lagrangiana corrispondente all'interazione. Quindi il termine di interazione nella densità di hamiltoniana è invariante per trasformazioni di LORENTZ. Ciò non si verifica più nel caso in cui l'interazione dipende dalle derivate degli operatori di campo. Inoltre le densità di hamiltoniana di interazione in due punti infinitamente vicini anche giacenti sulla stessa ipersuperficie spaziale non commutano più. Queste due circostanze rendono impossibile di scrivere la equazione di TOMONAGA-SCHWINGER

$$(1) \quad i \frac{\delta}{\delta \sigma_x} \Phi(\sigma) = \mathcal{H} \Phi(\sigma), \quad (\hbar = 1, c = 1),$$

nel solito modo ponendo al posto dell'operatore \mathcal{H} il termine di interazione nella densità di hamiltoniana. Infatti in tal caso l'equazione non sarebbe più nè relativisticamente invariante nè integrabile.

Tuttavia KANESAWA e TOMONAGA hanno mostrato nel lavoro citato che almeno nel caso dell'interazione tra campo mesonico e campo elettromagnetico esiste un operatore $\mathcal{Q}_x(\sigma)$ dipendente dalla ipersuperficie spaziale σ tale che $\mathcal{Q}_x(\sigma) + \mathcal{H}'(\sigma)$ è invariante, che $\mathcal{Q}_x(\sigma)$ si annulla quando σ si riduce ad un iperpiano $t = \text{cost.}$ (ossia

⁽¹⁾ B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 79 (1950).

⁽²⁾ S. KANESAWA e S. TOMONAGA: *Progr. Theor. Phys.*, **3**, 1 (1948).

allo spazio ordinario) e infine che l'equazione di TOMONAGA generalizzata

$$(1') \quad \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \sigma_x} + \mathcal{Q}_x(\sigma) + \underline{\mathcal{H}}'(x) \right] \Phi(\sigma) = 0$$

risulta integrabile.

Data l'esistenza dell'operatore $\mathcal{Q}_x(\sigma)$ di KANESAWA e TOMONAGA, risulta facilmente generalizzabile l'operatore di DYSON-FEYNMANN $S(\sigma)$ al caso in cui $\underline{\mathcal{H}}'(x)$ contenga derivate degli operatori di campo. Basta infatti sostituire in S al posto di $\underline{\mathcal{H}}'(x)$, $\mathcal{Q}_x(\sigma) + \underline{\mathcal{H}}'(x)$. Ciò posto è facile verificare che l'operatore S così generalizzato gode della proprietà su cui ho richiamato l'attenzione nel mio precedente lavoro (che chiamerò I). La verifica procede sostanzialmente come in I. L'unico punto in cui vi è una qualche differenza è il seguente: per giungere alla formula: $H_{T,0}^{(a)} = H_0 - S(\sigma)^{-1} \lambda H' S(\sigma)$ di I e conseguentemente alla (5) di I è necessario far uso del fatto che certe espressioni del tipo

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\sigma_0} dx_1 \int_{\sigma(\xi_2)}^{\infty} d\xi_1 \dots \int_{\sigma(x_1)} d\sigma_{\xi_r}^{(4)} \int_{-\infty}^{\sigma(x_1)} d\xi_{r+1} \dots \int_{-\infty}^{\sigma(\xi_{n-1})} d\xi_n \underline{\mathcal{H}}'(\xi_1) \dots \underline{\mathcal{H}}'(\xi_{r-1}) \times \\ \times \left[\underline{\mathcal{H}}'(\xi_r) \underline{\mathcal{H}}'(x_1) \right]_- \underline{\mathcal{H}}'(\xi_{r+1}) \dots \underline{\mathcal{H}}'(\xi_n)$$

si annullano. Ora ciò è immediato nel caso in cui $\underline{\mathcal{H}}'(x)$ non contenga derivate degli operatori di campo perchè in tal caso il commutatore $[\underline{\mathcal{H}}'(\xi_r) \underline{\mathcal{H}}'(x_1)]_-$ si annulla essendo ξ_r e x_1 punti appartenenti ad una stessa ipersuperficie spaziale. Nel caso più generale si può osservare che:

$$(3) \quad [\underline{\mathcal{H}}(\xi_r) \underline{\mathcal{H}}'(x_1)]_- = -i \left\{ \frac{\delta \mathcal{Q}_{\xi_r}}{\delta \sigma_{x_1}} - \frac{\delta \mathcal{Q}_{x_1}}{\delta \sigma_{\xi_r}} \right\}.$$

Sostituendo la (3) nella (2) si verifica pure immediatamente che la (2) si annulla.

Resterebbe ora da discutere la questione dell'esistenza dell'operatore di KANESAWA e TOMONAGA. MIYAMOTO⁽³⁾ ha discusso con metodo identico a quello di KANESAWA e TOMONAGA il caso di un campo mesonico vettoriale in interazione con i nucleoni. Io vorrei per sommi capi discutere il caso di un campo mesonico pseudo-scalare in accoppiamento pseudovettoriale con il campo nucleonico, tanto più che il procedimento che seguirò differisce per alcuni particolari dal procedimento di KANESAWA e TOMONAGA, evitando l'uso di passaggi che potrebbero sollevare dei dubbi. Per semplicità considereremo il caso di un campo mesonico neutrale. Nel caso che ci interessa è facile mostrare che si ha:

$$(4) \quad \left[\underline{\mathcal{H}}'(x) \underline{\mathcal{H}}'(x') \right]_- = 1/2 \left\{ \left[\underline{\mathcal{H}}'(x) \underline{\mathcal{H}}(x') \right]_- - \left[\underline{\mathcal{H}}'(\bar{x}') \underline{\mathcal{H}}(x) \right]_- \right\} = \\ = -\frac{if^2}{2} \left\{ \sum_{\nu, \mu} \psi^* \sigma_\nu \psi \psi^* \sigma_\mu \psi' \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x'_\mu} D(x - x') - \psi^* \sigma_\nu \psi \psi' \sigma_\mu \psi \frac{\partial^2}{\partial x'_\nu \partial x_\mu} D(x' - x) \right\},$$

dove f^2 è la costante di accoppiamento, le $\psi(x)$ sono gli operatori relativi al campo nucleonico, ($\psi' = \psi(x')$), σ_1 , σ_2 , σ_3 , $\sigma_4 = i\rho_1$ sono i soliti operatori della teoria di

(3) Y. MIYAMOTO: *Progr. Theor. Phys.*, **3**, 124 (1948).

DIRAC e infine $D(x - x')$ è la funzione invariante di PAULI e JORDAN per i mesoni. (Si noti che si sta facendo uso della « interaction representation »). Posto allora

$$(5) \quad \mathcal{Q}_x(\sigma) = -\frac{1}{2} f^2 \int_{\sigma} \sum \psi^* \sigma_\nu \psi \psi^* \sigma'_\mu \psi' N'_\mu \frac{\partial D(x - x')}{\partial x_\nu} d\sigma' + K,$$

dove N' è un tetra-vettore normale a σ in x' e puntante verso il futuro e K è un operatore indipendente da σ , si ha, facendo uso di un ben noto teorema,

$$(6) \quad \frac{\delta \mathcal{Q}_x}{\delta \sigma_{x'}} = \frac{f^2}{2} \sum \psi^* \sigma_\nu \psi \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \left(\psi^* \sigma'_\mu \psi' \frac{\partial D(x - x')}{\partial x_\nu} \right).$$

Ricordando allora alcune proprietà della funzione D , e la (4) si può agevolmente verificare la (3) che è la formula essenziale.

Si vede immediatamente che la espressione (5) è solo formalmente diversa dalla analoga di KANESAWA e TOMONAGA ma in realtà facendo uso delle proprietà della D si identifica con l'espressione che si otterrebbe usando il metodo di TOMONAGA e KANESAWA. Si può così facilmente verificare che l'operatore costruito, che a conti fatti risulta essere dato da:

$$(7) \quad \mathcal{Q}_x(\sigma) = \frac{1}{2} f^2 \sum (\psi^* \sigma_\mu N'_\mu \psi)^2 - \frac{1}{2} f^2 (\psi^* \rho_1 \psi)^2,$$

soddisfa a tutti i requisiti necessari. Naturalmente il metodo qui tratteggiato si può senz'altro estendere anche ai casi trattati dai precedenti autori. Pare quindi che le conclusioni tratte in I si possano estendere a tutti i casi di interesse fisico.

Sulla relazione di indeterminazione.

A. GAMBA

Istituto di Fisica del Politecnico, Torino

(ricevuto il 23 Aprile 1950)

Una dimostrazione elegante e del tutto generale del principio di indeterminazione è dovuta a BORN (1). Ammettiamo che un'osservabile si possa rappresentare per mezzo di un operatore reale (hermitiano), e definiamo il valor medio di un'osservabile in un modo qualunque purchè sia soddisfatta la condizione di linearità

$$\overline{aA + bB} = a\overline{A} + b\overline{B},$$

A, B sono operatori generici; a, b delle costanti reali; la soprallineatura indica i valori medi. BORN dimostra allora che

$$(1) \quad (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \left| \frac{AB - BA}{2} \right|^2,$$

dove $(\Delta A)^2 = \overline{A^2} - \overline{A}^2$.

In questa lettera mi propongo di dimostrare che è possibile ottenere col metodo di BORN anche la condizione più restrittiva dovuta a SCHRÖDINGER (2)

$$(2) \quad (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \left(\frac{\overline{AB + BA}}{2} - \overline{A}\overline{B} \right)^2 + \left| \frac{AB - BA}{2} \right|^2.$$

(1) V. per. es. M. BORN: *Natural Philosophy of Cause and Chance* (Oxford, 1948).

(2) SCHRÖDINGER: *Sitz. Preuss. Akad.*, (1930), p. 296.

Posto

$$D = A + \alpha B + i\lambda B,$$

$$D^* = A + \alpha B - i\lambda B,$$

con α, λ costanti reali, si ha

$$DD^* \geq 0,$$

o esplicitamente

$$(3) \quad \overline{(A + \alpha B + i\lambda B)(A + \alpha B - i\lambda B)} = \overline{A^2} + \alpha^2 \overline{B^2} + \alpha \overline{D} + \lambda^2 \overline{B^2} - \lambda \overline{D} \geq 0,$$

dove si è posto

$$(4) \quad \begin{cases} \overline{D} = \overline{AB + BA}, \\ \overline{C} = \overline{i(AB - BA)}. \end{cases}$$

L'espressione a primo membro della (3) è minima quando

$$\begin{cases} 2\alpha \overline{B^2} + \overline{D} = 0, \\ 2\lambda \overline{B^2} - \overline{C} = 0, \end{cases}$$

cioè per $\alpha = -\frac{\overline{D}}{2\overline{B^2}}, \quad \lambda = \frac{\overline{C}}{2\overline{B^2}}.$

Tale minimo vale

$$\overline{A^2} - \frac{\overline{D}^2}{4\overline{B^2}} - \frac{\overline{C}^2}{4\overline{B^2}} \geq 0,$$

cioè

$$(5) \quad \bar{A}^2 \cdot B^2 \geq \left(\frac{\bar{D}}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2.$$

Se ora si sostituisce nella (5) A con $A - \bar{A}$ e B con $B - \bar{B}$ e si tengono presenti le (4), si ottiene immediatamente la (2).

Sull'applicazione del metodo di Feynman alla bremsstrahlung.

M. CINI

Istituto di Fisica dell'Università di Torino

L. A. RADICATI

Istituto di Fisica del Politecnico di Torino

(ricevuto il 26 aprile 1950)

FEYNMAN ⁽¹⁾ ha recentemente sviluppato un formalismo covariante per descrivere i fenomeni elettrodinamici, proponendo, nel quadro di tale formalismo, una modificazione nell'interazione degli elettroni al disotto di una distanza critica $1/\lambda$, modificazione che coincide sostanzialmente con il metodo del taglio relativistico, già proposto da WATAGHIN ⁽²⁾. Con l'uso di tale metodo è possibile eliminare le divergenze che figurano nella teoria consueta.

Per le energie piccole rispetto a λ ⁽³⁾, la modificazione introdotta non altera i risultati già noti. Tuttavia, se questo fattore di taglio ha un significato fisico, e non viene considerato soltanto come un puro artificio sottrattivo, è necessario esaminare quali modificazioni subiscano anche quei processi nei quali non figurano divergenze. Tanto più logica sembra questa ricerca, se si tiene presente che le energie delle particelle della radiazione cosmica sono certamente confrontabili, ed anche molto maggiori di λ (λ dell'ordine del centinaio di masse elettroniche).

I calcoli preliminari intrapresi in questa direzione, hanno portato al risultato che nella bremsstrahlung di un elettrone nel campo di un nucleo, può diventare più probabile, alle elevate energie, l'emissione simultanea di più fotoni con energia uguale ad una certa energia critica, che l'emissione di un solo fotone con energia dell'ordine di quella dell'elettrone incidente.

I calcoli sono stati eseguiti partendo dalle espressioni per le probabilità di transizione per diversi processi che si ottengono usando il formalismo di FEYNMAN. Come è noto in tale formalismo si introducono due funzioni $K_+(2,1)$ e $\delta_+(s_{21}^2)$ che rappresentano la propagazione rispettivamente di un elettrone e di un fotone tra i due punti 1 e 2 dello spazio-tempo ⁽⁴⁾.

⁽¹⁾ R. P. FEYNMAN: *Phys. Rev.*, **74**, 939 (1948); **74**, 1430 (1948); **76**, 749 (1949); **76**, 769 (1949).

⁽²⁾ G. WATAGHIN: *Zeits. Phys.*, **88**, 92 (1934); *Phys. Rev.*, **56**, 1245 (1939); *Acad. Bras. Ciencias*, **S**, 129 (1943).

⁽³⁾ Usiamo il sistema di unità naturali $c = \hbar = 1$.

⁽⁴⁾ Cfr. FEYNMAN: *Phys. Rev.*, **76**, 749, formula (31) e **76**, 769, formula (10).

Il taglio relativistico consiste nell'usare una $K_+(2,1)$ definita da

$$K_+(2,1) = -\frac{i\lambda^2}{4\pi^2} \int \frac{1}{p-m} \cdot \frac{1}{p^2-m^2-\lambda^2} \exp[-ip \cdot x_{21}] d^4p =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int \left\{ \frac{p^+ + m}{2E_0} \left[\exp[-iE_0(t_2-t_1)] - \frac{E_0}{E_\lambda} \exp[-iE_\lambda(t_2-t_1)] \right] - \right. \\ \left. - \beta \frac{E_\lambda - E_0}{2E_\lambda} \exp[-iE_\lambda(t_2-t_1)] \right\} \exp[ip(x_2-x_1)] d^3p & \text{per } t_2 > t_1, \\ \frac{1}{2\pi} \int \left\{ \frac{p^- + m}{2E_0} \left[\exp[iE_0(t_2-t_1)] - \frac{E_0}{E_\lambda} \exp[iE_\lambda(t_2-t_1)] \right] + \right. \\ \left. + \beta \frac{E_\lambda - E_0}{2E_\lambda} \exp[iE_\lambda(t_2-t_1)] \right\} \exp[ip(x_2-x_1)] d^3p & \text{per } t_2 < t_1, \end{cases}$$

ed una $\delta_+(s_{21}^2)$ definita da

$$\delta_+(s_{21}^2) = \frac{1}{\pi} \int \frac{1}{t^2} \frac{\lambda^2}{t^2 - \lambda^2} \exp[-ik \cdot x_{21}] d^4k =$$

$$= \begin{cases} 2i \int \left\{ \frac{\exp[-ik_0(t_2-t_1)]}{2k_0} - \frac{\exp[-ik_\lambda(t_2-t_1)]}{2k_\lambda} \right\} \exp[ik(x_2-x_1)] d^3k & \text{per } t_2 > t_1, \\ 2i \int \left\{ \frac{\exp[ik_0(t_2-t_1)]}{2k_0} - \frac{\exp[ik_\lambda(t_2-t_1)]}{2k_\lambda} \right\} \exp[ik(x_2-x_1)] d^3k & \text{per } t_2 < t_1, \end{cases}$$

dove: $p^+ = \beta E_0 - \beta \alpha p$, $p^- = -\beta E_0 - \beta \alpha p$, $E_0^2 = p^2 + m^2$, $E_\lambda^2 = p^2 + m^2 + \lambda^2$, $k_\lambda^2 = k_0^2 + \lambda^2$, $k_0 = |\mathbf{k}|$.

Introducendo le funzioni K_+ e δ_+ nelle espressioni per gli elementi di matrice che determinano la probabilità di transizione per unità di tempo, si ottengono per i diversi processi, i seguenti risultati ⁽⁵⁾:

a) Effetto COMPTON.

$$H = \sum \frac{H_{AI} H_{IF}}{E_A - E_I} \frac{\lambda^2}{E_A^2 - E_I^2},$$

dove la somma si intende eseguita rispetto ai due possibili stati intermedi, alle orientazioni dello spin, e ai due segni dell'energia. L'elemento di matrice relativo ad ognuno degli stati intermedi risulta moltiplicato per un fattore correttivo (che al limite per $\lambda \rightarrow \infty$ tende ad uno), che vale, per lo stato intermedio in cui inizialmente viene assorbito il quanto incidente, nel sistema in cui l'elettrone prima dell'urto è in quiete,

$$(1) \quad \frac{\lambda^2}{2mk_0 - \lambda^2}$$

(k_0 è l'energia del quanto incidente).

⁽⁵⁾ Usiamo i simboli di W. HEITLER: *Quantum Theory of Radiation* (Oxford University Press, 1944).

Per brevità la nostra discussione si limita a questo solo elemento che è quello che dà origine al fenomeno più singolare.

Il fattore (1) dà luogo, per $k_0 = \lambda^2/2m$ ad un fenomeno di risonanza caratteristico dell'uso del fattore di taglio. Esso conduce alla previsione di un andamento del fenomeno, nel campo di energie di quest'ordine di grandezza, assai diverso da quello consueto, con un aumento notevole della sezione d'urto. L'ampiezza infinita di questa risonanza (in modo perfettamente analogo a quanto avviene per la fluorescenza) deriva dal non aver tenuto conto nei calcoli della vita media dello stato intermedio. Se si tiene conto di questa, l'ampiezza di risonanza risulta naturalmente finita.

b) Bremsstrahlung di un elettrone nel campo coulombiano di un nucleo di massa infinita, con produzione di un fotone k .

Come è noto anche in questo caso l'elemento di matrice risulta costituito da due termini relativi ai due possibili stati intermedi. Consideriamo per brevità il termine corrispondente alla emissione del quanto dopo lo scattering nel campo del nucleo. Per tale termine il fattore di correzione vale:

$$(2) \quad \frac{\lambda^4}{(|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p} - \mathbf{k}|^2 + \lambda^2)(E_0^2 - |\mathbf{p} + \mathbf{k}|^2 - m^2 - \lambda^2)},$$

dove \mathbf{p}_0 , \mathbf{p} sono l'impulso iniziale e finale dell'elettrone; e $E_0^2 = p_0^2 + m^2$.

c) Bremsstrahlung come sopra, con produzione di due fotoni \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 .

L'elemento di matrice per questo processo, consta di sei termini relativi a sei possibili stati intermedi, il cui ordine di grandezza è, secondo la teoria classica, di $1/137$ rispetto ai termini analoghi per la bremsstrahlung con emissione di un solo fotone con impulso $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. Ai fini della nostra discussione ci interessano soltanto quelli relativi ai due stati in cui vengono emessi, dopo lo scattering nel campo del nucleo, prima il quanto \mathbf{k}_1 e dopo quello \mathbf{k}_2 , e viceversa. Il fattore correttivo per il primo termine è

$$(3) \quad \frac{\lambda^6}{(|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|^2 + \lambda^2)(E_0^2 - |\mathbf{p} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2 - m^2 - \lambda^2)((E_0 - k_1)^2 - |\mathbf{p} + \mathbf{k}_2|^2 - m^2 - \lambda^2)}$$

e quello per il secondo

$$(4) \quad \frac{\lambda^6}{(|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|^2 + \lambda^2)(E_0^2 - |\mathbf{p} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2 - m^2 - \lambda^2)((E_0 - k_2)^2 - |\mathbf{p} + \mathbf{k}_1|^2 - m^2 - \lambda^2)}$$

Se si considera ora il processo b); supponendo per semplicità che l'elettrone dopo l'urto abbia impulso nullo ⁽⁶⁾ si vede, tenendo conto che in questo caso $E_0 = k + m$, che si ha risonanza per la produzione di un fotone quando (cfr. (2)) $k = \lambda^2/2m$ e quindi $E_0 = \lambda^2/2m + m \leq \lambda^2/2m$. Per tale valore di E_0 si ha risonanza anche per il fenomeno della produzione di due quanti tali che $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$. Sebbene i fattori correttivi abbiano lo stesso ordine di grandezza, le probabilità dei due fenomeni stanno fra loro nel rapporto $1/137$.

Se consideriamo ora un elettrone incidente di energia $E_0 = 2(\lambda^2/2m)$ il fattore correttivo per la produzione di un fotone non presenta risonanza, mentre i due fattori (3) (4) per la produzione di due fotoni sono in risonanza rispettivamente per $k_2 = \lambda^2/2m$, $k_1 = \lambda^2/2m$.

⁽⁶⁾ Il considerare \mathbf{p} diverso da zero non altera la sostanza dei risultati.

La probabilità di questo processo può risultare quindi anche assai maggiore di quella del processo singolo, nonostante il rapporto $1/137$ dei termini classici.

In modo analogo, siccome il fattore correttivo generico per i termini che compongono l'elemento matrice relativo alla produzione di n fotoni, contiene n fattori del tipo di quelli esaminati, si vede facilmente che quando l'energia dell'elettrone incidente è dell'ordine di $n(\lambda^2/2m)$, la produzione di n fotoni di energia $\lambda^2/2m$ può risultare più probabile che non la produzione di un solo fotone di energia $n(\lambda^2/2m)$.

Il fattore $(|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|^2 + \lambda^2)$ è uguale in tutti i processi (avendo supposto $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$) e non presenta alcun valore di risonanza.

L'estensione di queste considerazioni al caso del campo mesonico suggerisce che il processo della produzione multipla dei mesoni possa diventare preponderante alle alte energie, in virtù del fenomeno di risonanza, anche tenendo conto del fatto che il rapporto fra gli ordini di grandezza degli elementi di matrice relativi ai processi di ordine 1 ed n è molto maggiore di $(1/137)^n$.

La validità dei risultati trovati è naturalmente vincolata alle note difficoltà che incontrano i tentativi di interpretare realisticamente il taglio introdotto per l'eliminazione delle divergenze.

Ringraziamo il prof. WATAGHIN per le utili discussioni avute sull'argomento.

On nuclear disintegrations underground.

C. FRANZINETTI

H. H. Wills Physical Laboratory, University of Bristol, England

(ricevuto il 10 Maggio 1950)

EVANS and GEORGE ⁽¹⁾ have recently observed production of explosive disintegrations under large thicknesses of matter ($\sim 6000 \text{ g/cm}^2$). As they point out, the component of the cosmic radiation responsible for the majority of the disintegrations above ground cannot be responsible for the observed underground stars because of the strong absorption in traversing matter.

The most reasonable assumption is to correlate these events to the most penetrating component of the cosmic radiation: the μ -mesons. The observed intensities of μ -mesons and of the disintegration suggest for the cross section of the process the value $\sim 10^{-30} \text{ cm}^2$ ⁽²⁾.

On the other hand, μ -mesons are known to have a very weak interaction with matter. In order to overcome the difficulty, it has been suggested by FERRETTI ⁽³⁾ that μ -mesons might scatter π -mesons colliding with nucleons. As is known, the proton and neutron are believed to exist for part of the time as a neutron plus a positive meson in a virtual state and as a proton plus a negative meson respectively. In order

to get the correct value for their magnetic moment they should exist as such for 1/5 of the time. A μ -meson could, therefore, scatter a π -meson by means of COULOMB forces alone. If one assume spin 1/2 for the μ and 0 or 1 for the π , the cross sections per nucleon for such a process in high energy collisions are ⁽⁴⁾

(1a) Spin 0

$$\sigma dW = 1.3 \times 10^{-30} \frac{dW}{W^2} \left(1 - \frac{W}{\mathcal{E}}\right) \text{ cm}^2,$$

(1b) Spin 1

$$\sigma dW = 4.2 \times 10^{-31} \frac{dW}{W} \left(1 - \frac{W}{\mathcal{E}} - \frac{W^2}{2\mathcal{E}^2}\right).$$

W and \mathcal{E} represent the energies of the scattered π and of the μ respectively, both being expressed in $m_\pi c^2$ units ($= 0.144 \text{ GeV}$). In view of the large statistical error in the experiment mentioned above, we regard the experimental result as not inconsistent with these theoretical values. The purpose of the present letter is to show that the correct order of magnitude of the frequency of the disintegration is given by this theory and that a closer investigation on this line on the nature of this effect is fully justified.

⁽¹⁾ J. EVANS and E. P. GEORGE: *Nature*, **164**, 20 (1949).

⁽²⁾ E. P. GEORGE, private communication.

⁽³⁾ B. FERRETTI, private communication.

⁽⁴⁾ See, f. i., W. PAULI: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 203 (1941).

*Calculation of the number
of fast π -mesons underground.*

Let the differential energy spectrum of μ -mesons under a thickness x of matter be expressed by a law

$$(2) \quad dN = k \frac{d\mathcal{E}}{(\mathcal{E} + \eta x)^3},$$

η being the loss of energy for ionisation, k a constant.

Then, the spectrum of the π 's, generated by the μ 's in a layer of one gram per cm^2 , is

$$(3) \quad G(W, x) dW = \\ = k \cdot \nu \cdot dW \cdot \int_W^\infty \sigma(\mathcal{E}, W) \frac{d\mathcal{E}}{(\mathcal{E} + \eta x)^3},$$

ν being the number of nucleons per g/cm^2 of the absorber.

On the other hand π 's will be absorbed: i) by ionisation loss, ii) by nuclear collisions, iii) by spontaneous decay.

It follows that the number of π 's of energy W , $W+dW$ at the depth x must be represented by a function F satisfying the following differential equation

$$(4) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \eta \frac{\partial F}{\partial W} - \left(N\sigma_0 + \frac{1}{c\tau_0} \frac{1}{W} \right) F + G,$$

the general integral of which is, considering G independent from x or, in other words, the π 's in equilibrium with the μ 's

$$(5) \quad F(W, x) = \exp \left[\frac{1}{\eta} \int A(W) dW \right] \times \\ \times \left[\varphi(W + \eta x) - \frac{1}{\eta} \int G(W) dW \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{1}{\eta} \int A(W) dW \right] \right].$$

$A(W) = N\sigma_0 + \frac{1}{c\tau_0} \frac{1}{W}$ and φ an arbitrary function of $W + \eta x$.

The boundary condition

$$F(W, x = 0) = 0,$$

for any W , defines the φ . We get finally

$$(6) \quad F(W, x) = \\ = \int_0^x G(W + \eta x) \exp [-\beta \eta x] \left(1 + \frac{\eta x}{W} \right)^{-\alpha} dx, \\ \alpha = \frac{1}{\eta c\tau_0} \approx 0.065, \quad \beta = \frac{N\sigma_0}{\eta} = 0.4,$$

for

$$N\sigma_0 = \frac{1}{200 \text{ g/cm}^2},$$

η being expressed in $m_\pi c^2$ units per g/cm^2 .

The total number of π -mesons, above a certain energy W is then

$$(7) \quad n(W, x) = \int_W^\infty F(W, x) dW = \\ = \int_W^\infty dW \int_0^x G(W + \eta x) \times \\ \times \exp [-\beta \eta x] \left(1 + \frac{\eta x}{W} \right)^{-\alpha} dx.$$

Hence, the number of disintegrations due to π 's in the emulsion

$$(8) \quad S = n(W, x) N\sigma_0 V,$$

N being the number of atoms per cm^3 in emulsion and V the volume of observed emulsion. It must be noted also that a comparable number of recoil nucleons due to the same process, will have enough energy to produce stars; the neutrons generated in this way might be the origin of the stars without observable primaries found in photographic emulsions at great depths.

The integrals in eq. (6) and (7) must be evaluated numerically. The result of the numerical integration for both the

cross-sections (1.a) and (1.b) and a depth of $6 \cdot 10^3$ g/cm² is shown in fig. 1. The relevant differential spectrum is shown in fig. 2. For very high energy ($W \gg \eta x$) the following approximate formulae can be used

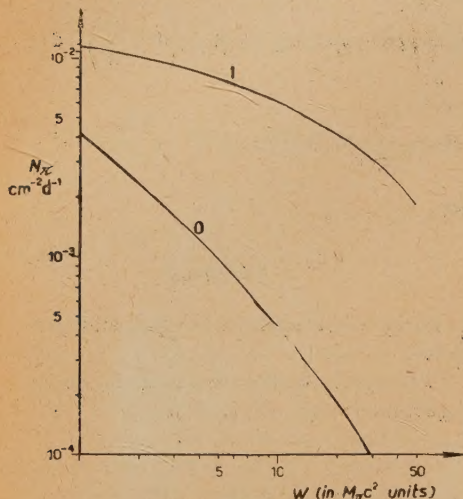


Fig. 1.

$$n(W) = \frac{A_0}{W^3} \text{ d}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ for spin } 0,$$

$$n(W) = \frac{A_1}{W^2} \text{ d}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ for spin } 1,$$

$$A_0 = 1.3 \cdot 10^{-30} \cdot \frac{5k\nu}{18\eta\beta} = 48,$$

$$A_1 = 4.2 \cdot 10^{-31} \cdot \frac{k\nu}{4\eta\beta} = 14.$$

From the numerical calculations and the above formulae, we find for the total number of π -mesons above the energy $W=1$, under $6 \cdot 10^3$ g/cm²

$$n_0 = 0.0041 \text{ per day per cm}^2,$$

$$n_1 = 0.011 \text{ per day per cm}^2.$$

Hence, the number of disintegrations per cm³ of emulsion

$$S_0 = 0.8 \cdot 10^{-4} \text{ per day per cm}^3 \text{ of emulsion,}$$

$$S_1 = 2.2 \cdot 10^{-4} \text{ per day per cm}^3 \text{ of emulsion,}$$

In this calculation no account was taken of:

a) The lateral spread of π -mesons. This causes a reduction of events because of the longer path of the particles having a greater zenith angle.

b) The fact that the cross-sections (1) here used are exact only for high energy primary μ 's. For low energies

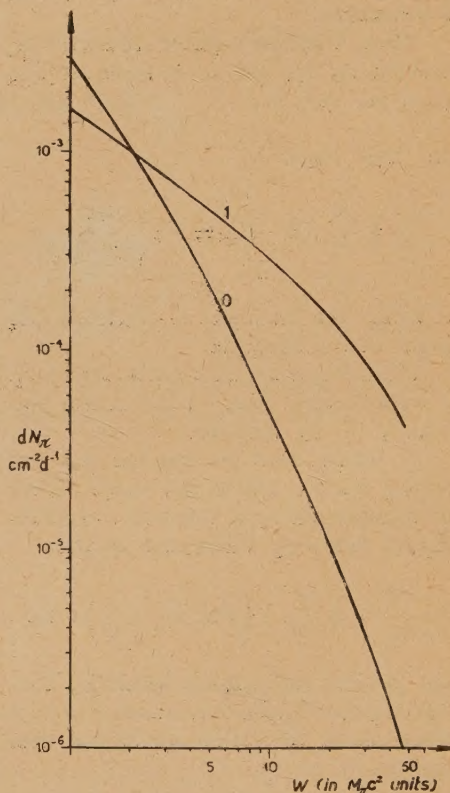


Fig. 2.

they predict a too small yield. However, for particles of kinetic energy $\geq m_\pi c^2$ the formula is still correct at least inside 20 %.

c) For small energy transfer, the collision between π 's and μ 's is not to be considered as a collision between free particles. Neglecting this fact, the

theory predicts a too large yield. This will compensate partially the error mentioned in *b*).

Neither of these facts should affect the order of magnitude of the results. However, not much more than an agree-

ment of the order of magnitude with the experiments should be expected from it.

I wish to thank Prof. FERRETTI, who suggested the problem and helped me in carrying out the calculation.

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

